Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Vektoralgebra und analytische Geometrie

1. Vorbemerkungen

2. Koordinatensysteme

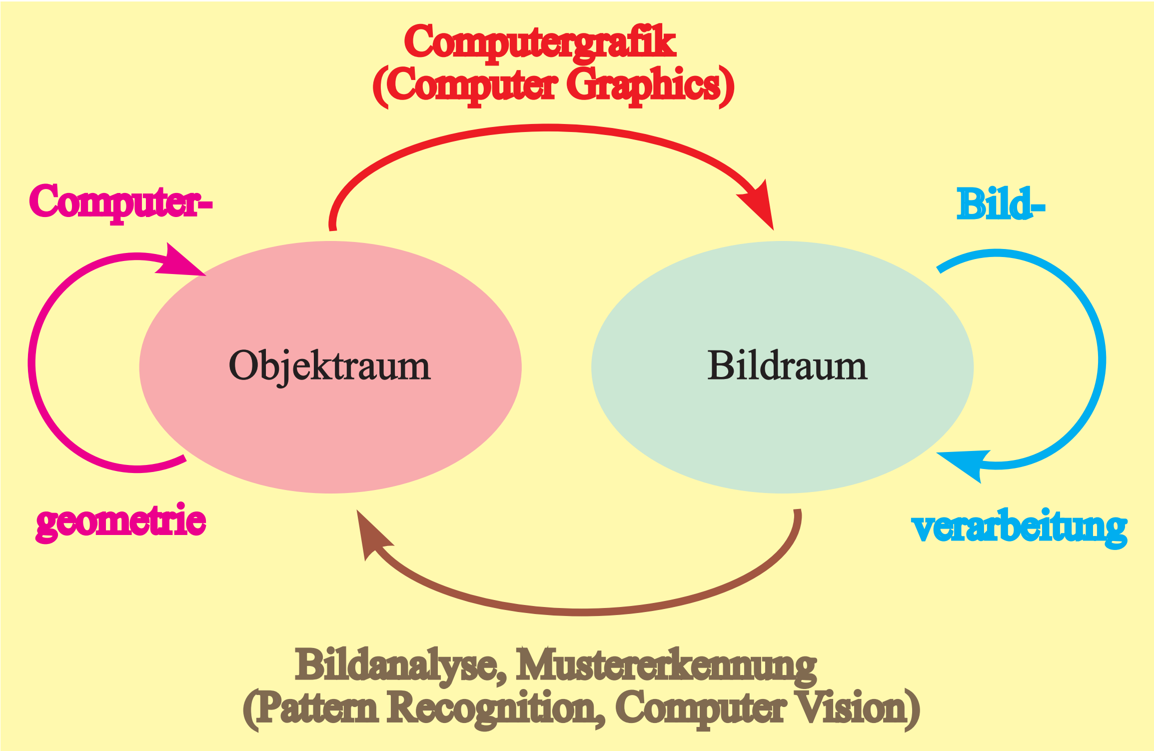
3. Punkte und Vektoren

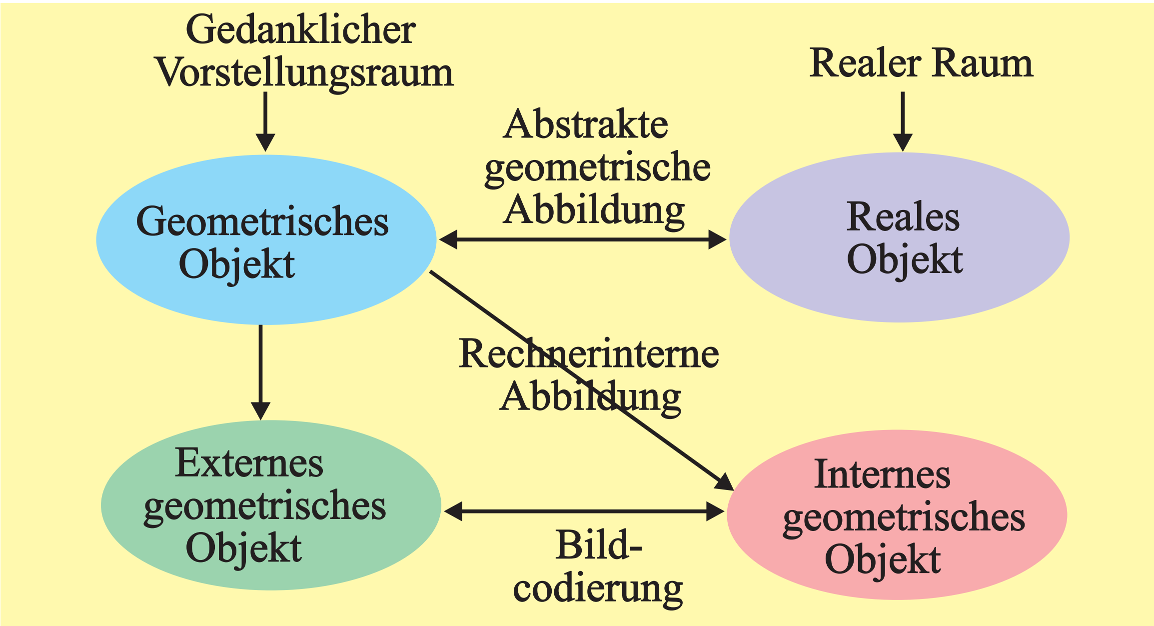
4. Vektoroperationen

5. Geraden

6. Ebenen

Komponenten der grafische Datenverarbeitung (GDV)



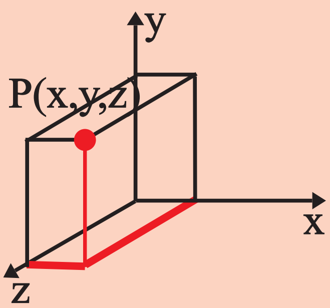


Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

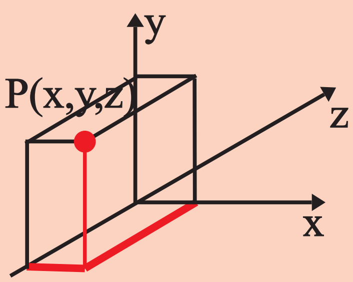
Koordinatensysteme

Kartesisches Koordinatensystem

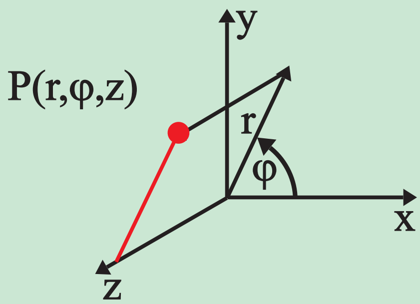
Rechtssystem



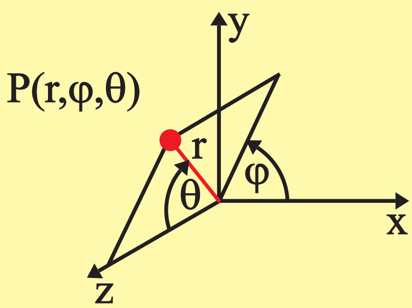
Linkssystem



Polar- oder Zylinder-Koordinatensystem

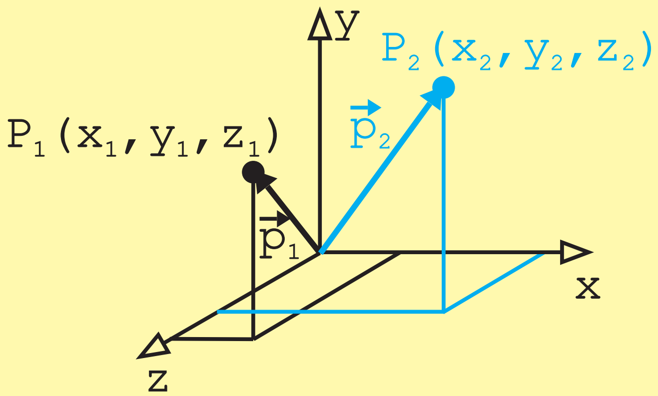


Kugel-Koordinatensystem



Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Ortsvektor



$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (x_1, y_1, z_1)^T$$

Vektoroperationen

Skalares Vielfaches: $k\vec{p} = (kx, ky, kz)^T$

Summe/Differenz: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)^T$

$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)^T$

Punktabstand:

$$a = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} = |\vec{p}_2 - \vec{p}_1|$$

Vektoroperationen

Skalarprodukt:

$$\vec{p}_1\vec{p}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$= |\vec{p}_1|\,|\vec{p}_2|\cos\varphi$$

$$\vec{p}_1\vec{p}_2 = \vec{p}_2\vec{p}_1$$

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\,\vec{p}_3 = \vec{p}_1\vec{p}_3 + \vec{p}_2\vec{p}_3$$

$$(\lambda\vec{p}_1)\,\vec{p}_2 = \lambda\,(\vec{p}_1\vec{p}_2)$$

Vektorprodukt:

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2,\ \ z_1x_2 - x_1z_2,\ \ x_1y_2 - y_1x_2)^T$$

$$|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2| = |\vec{p}_1|\,|\vec{p}_2|\sin\varphi$$

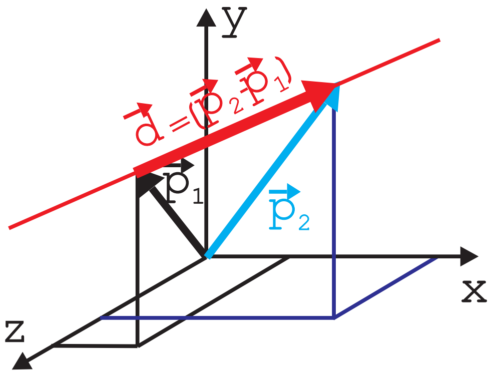
$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = -\vec{p}_2 \times \vec{p}_1$$

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \times \vec{p}_3 = \vec{p}_1 \times \vec{p}_3 + \vec{p}_2 \times \vec{p}_3$$

$$(\lambda\vec{p}_1) \times \vec{p}_2 = \lambda\,(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

3D-Gerade



Geradengleichung in Vektorform

$$\vec{g} = \vec{b} + \mu\,\vec{d}$$

$\vec{d} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$ und $\vec{b} = \vec{p}_1$

Geradengleichungen in kartesischen Koordinaten

x-y-Ebene: $(x-x_1)(y_2-y_1)=(y-y_1)(x_2-x_1)$

y-z-Ebene: $(y-y_1)(z_2-z_1)=(z-z_1)(y_2-y_1)$

z-x-Ebene: $(z-z_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(z_2-z_1)$

Gleichungen der Geraden durch die Punkte $P_1(0,7,8)$ und $P_2(9,9,8)$

Kartesische Koordinaten

$y=(2x+63)/9$
$z=8$

Parameterdarstellung

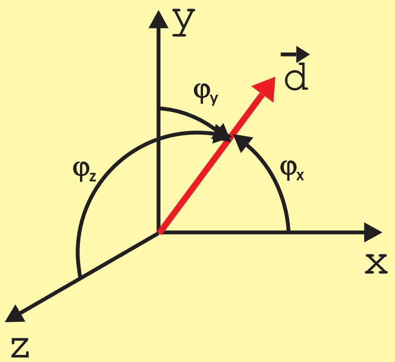
$x=9\mu$
$y=7+2\mu$
$z=8$

Vektordarstellung

$$\vec{g}=(0,7,8)+\mu(9,2,0)=(9\mu,7+2\mu,8)$$

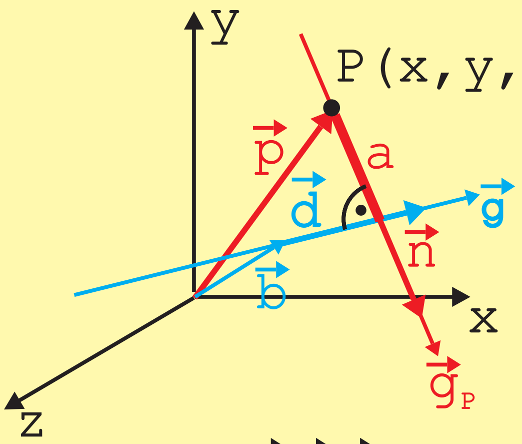
Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Winkel zwischen Vektor und Koordinatenachsen



$$|\vec{d}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$x = |\vec{d}|\cos\varphi_x$$
$$y = |\vec{d}|\cos\varphi_y$$
$$z = |\vec{d}|\cos\varphi_z$$

Abstand Gerade - Punkt



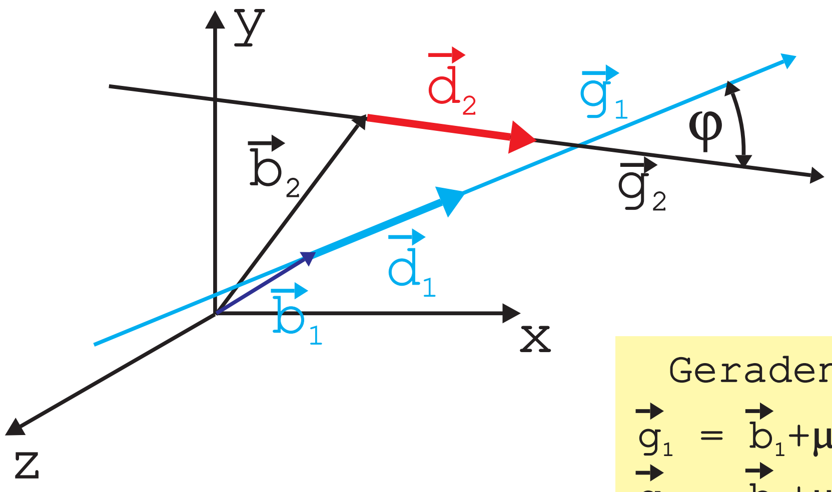
Abstand

$$a = \frac{|\vec{d} \times (\vec{p} - \vec{b})|}{|\vec{d}|}$$

oder $$\mu_{min} = \frac{\vec{d}(\vec{p} - \vec{b})}{\vec{d}\,\vec{d}}$$

$$a = \sqrt{(b_x+\mu_{min}d_x-p_x)^2+(b_y+\mu_{min}d_y-p_y)^2+(b_z+\mu_{min}d_z-p_z)^2}$$

Winkel zwischen zwei Geraden



Geraden

$$\vec{g}_1 = \vec{b}_1 + \mu_1 \vec{d}_1$$
$$\vec{g}_2 = \vec{b}_2 + \mu_2 \vec{d}_2$$

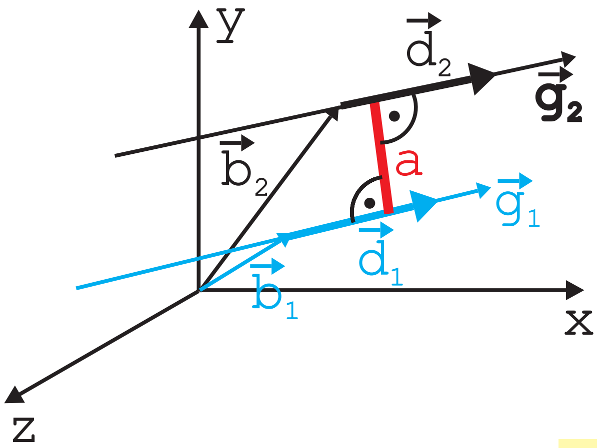
Winkel: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{d}_1 \vec{d}_2}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|}$

$|\vec{d}_1||\vec{d}_2| = \vec{d}_1\vec{d}_2$: Geraden sind parallel

$\vec{d}_1\vec{d}_2 = 0$: Geraden sind senkrecht zueinander orientiert

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Abstand zwischen zwei Geraden (1)



Geraden

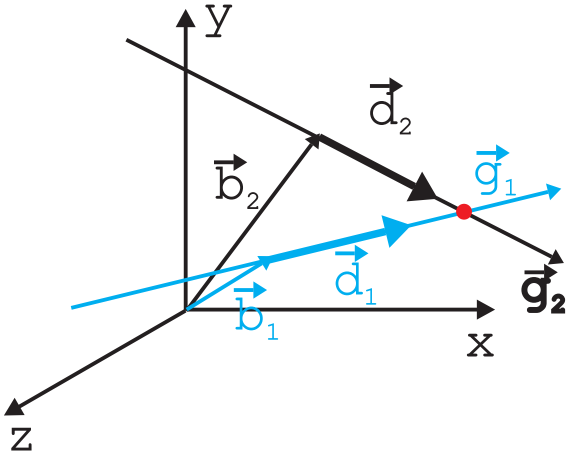
$$\vec{g}_1 = \vec{b}_1 + \mu_1 \vec{d}_1$$
$$\vec{g}_2 = \vec{b}_2 + \mu_2 \vec{d}_2$$

Fall 1: Geraden sind parallel

$$(\vec{d}_2 = \lambda \vec{d}_1 \ , \ \lambda \neq 0)$$

$$a = \frac{|\vec{d}_1 \times (\vec{b}_2 - \vec{b}_1)|}{|\vec{d}_1|}$$

Abstand zwischen zwei Geraden (2)



Geraden

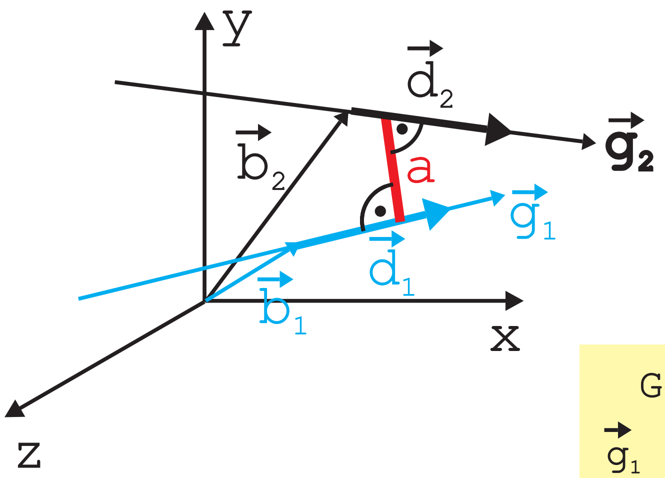
$$\vec{g}_1 = \vec{b}_1 + \mu_1 \vec{d}_1$$
$$\vec{g}_2 = \vec{b}_2 + \mu_2 \vec{d}_2$$

Fall 2: Geraden sind komplanar und nicht parallel

Bedingung:

$$b_{1x}+\mu_1 d_{1x}=b_{2x}+\mu_2 d_{2x}$$
$$b_{1y}+\mu_1 d_{1y}=b_{2y}+\mu_2 d_{2y}$$
$$b_{1z}+\mu_1 d_{1z}=b_{2z}+\mu_2 d_{2z}$$

Abstand zwischen zwei Geraden (3)



Geraden

$\vec{g}_1 = \vec{b}_1 + \mu_1 \vec{d}_1$

$\vec{g}_2 = \vec{b}_2 + \mu_2 \vec{d}_2$

Fall 3: Geraden sind weder komplanar noch parallel

Abstand: $a = \mu_{min} \, |\vec{d}|$

$$\mu_{min} = \frac{\vec{d}(\vec{b}_2 - \vec{b}_1)}{\vec{d}\,\vec{d}}$$

$$\vec{d} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Abstand zwischen zwei Geraden (4)

Geraden: $\vec{g}_1 = \mu_1 (1,1,1)^T$
$\vec{g}_2 = (0,0,1)^T + \mu_2 (5,5,5)^T$

Wegen

$$(1,1,1)^T = \lambda (5,5,5)^T$$

sind beide Geraden parallel und damit komplanar (**Fall 1**)

Abstand: $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Geraden: $\vec{g}_1 = (0,7,8)^T + \mu_1 (9,2,0)^T$
$\vec{g}_2 = (8,5,6)^T + \mu_2 (-4,18,10)^T$

Komponenten-gleichungen:

$$\begin{aligned} 0+9\mu_1 &= 8-4\mu_2 \\ 7+2\mu_1 &= 5+18\mu_2 \\ 8+0\mu_1 &= 6+10\mu_2 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Komponenten-gleichungen folgt $\mu_1=0.8$ und $\mu_2=0.2$

Diese Werte erfüllen auch die dritte Gleichung $\longrightarrow$ beide Geraden sind komplanar (**Fall 2**).

Schnittpunkt: $\vec{g}_s = (7.2, 8.6, 8)^T$

Geraden: $\vec{g}_1 = (1,0,0)^T + \mu_1 (1,1,1)^T$
$\vec{g}_2 = (0,0,0)^T + \mu_2 (1,2,3)^T$

Die Geraden sind weder parallel noch komplanar (**Fall 3**).

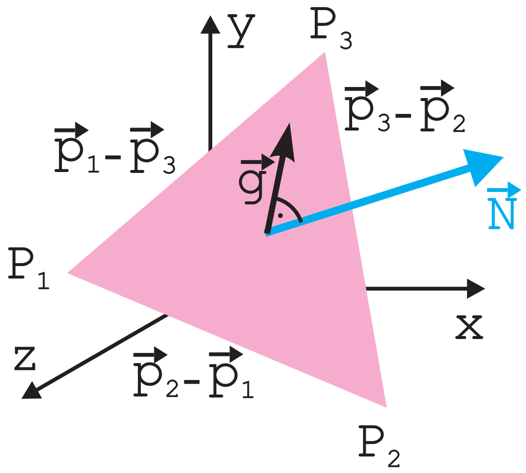
$\vec{b} = \vec{d}_1 x \vec{d}_2 = (1,-2,1)^T$ $\quad \vec{b}_2 - \vec{b}_1 = (-1,0,0)^T$

$\vec{b}(\vec{b}_2 - \vec{b}_1) = -1$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{6}$ $\quad \mu_{min} = -\frac{1}{6}$

Abstand: $a = (-)\sqrt{\frac{1}{6}}$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Ebene im 3D-Raum



Ebenengleichung in Vektorform

$$\vec{N}\,\vec{g} = k$$

$$\vec{N} = (\vec{p}_2-\vec{p}_1) \times (\vec{p}_3-\vec{p}_2)$$

Ebenengleichungen in kartesischen Koordinaten

1. Form: $Ax+By+Cz+D=0$

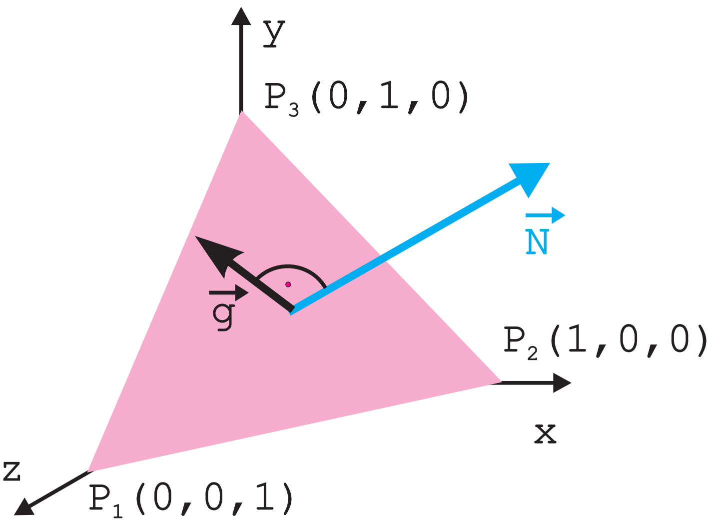
2. Form: $x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $(B_1=B/A, \ldots, A\neq 0)$

3. Form: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ $(A_2=A/d, \ldots)$

mit $d=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Beispiel zur Ebenengleichung



Vektorform

$\vec{N}\,\vec{g} = 1$

$\vec{N} = (1,1,1)^T$

Kartesische Koordinaten

1. Form: $x+y+z-1=0$

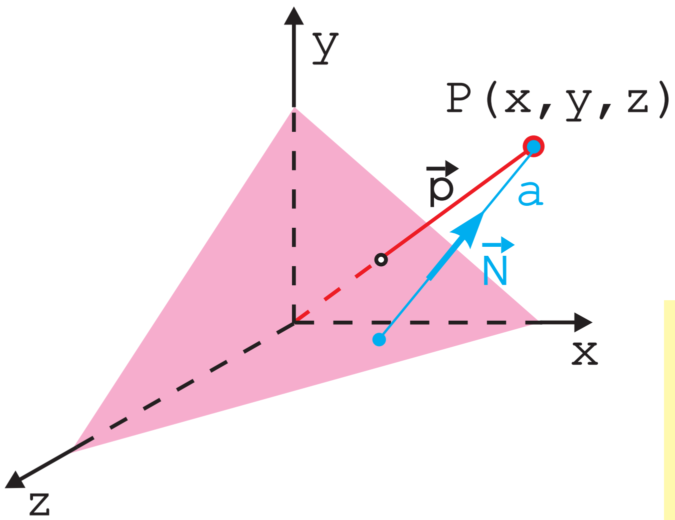
2. Form: $x+y+z-1=0$

3. Form: $\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{y}{\sqrt{3}} + \dfrac{z}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0$

$$d = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Abstand Punkt - Ebene



Vektorform

$$a = \mu_P |\vec{N}|$$

$$\mu_P = \frac{k - \vec{N}\,\vec{p}}{\vec{N}\,\vec{N}}$$

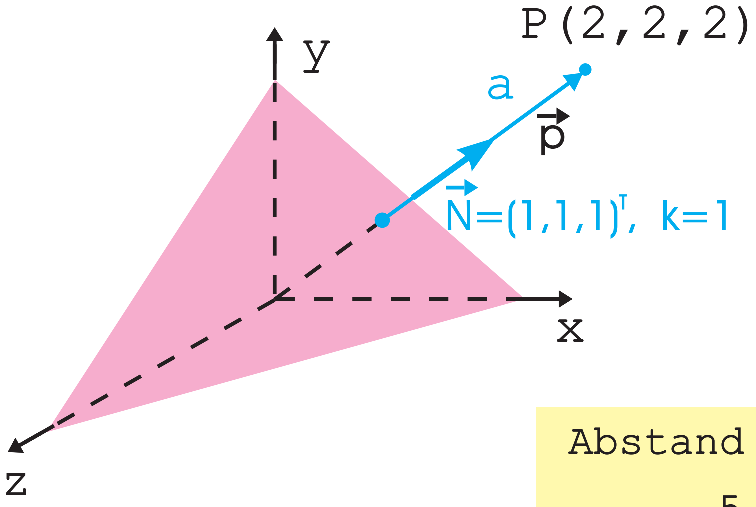
Kartesische Koordinaten

$$a = |A_2x + B_2y + C_2z + D_2|$$

Das Vorzeichen von μ_P bzw. des innerhalb der Absolutstriche stehenden Ausdrucks gibt an, auf welcher Seite der Ebene der Punkt liegt.

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Beispiel zu Abstand Punkt - Ebene



Abstand

$$a = -\frac{5}{\sqrt{3}}$$

P liegt "vor" der Ebene

Ebenengleichung: $\vec{N}\,\vec{g} = 1$

Ortsvektor zu P: $\vec{p} = (2,2,2)^T$

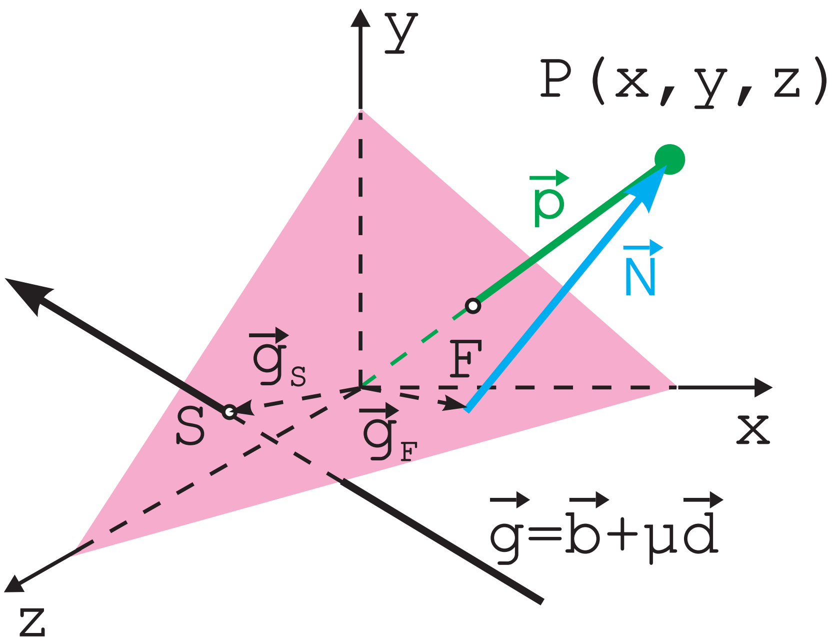
$$\vec{N}\,\vec{p} = (1,1,1)^T(2,2,2)^T = 6$$

$$\vec{N}\,\vec{N} = (1,1,1)^T(1,1,1)^T = 3$$

$$\mu_P = (1-6)/3 = -5/3$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Fußpunkt F des Lotes von P auf die Ebene und Schnittpunkt S von Gerade und Ebene



Fußpunkt F

$$g_F = \vec{p} + \mu_F \vec{N}$$

$$\mu_F = \frac{k - \vec{N}\,\vec{p}}{\vec{N}\,\vec{N}}$$

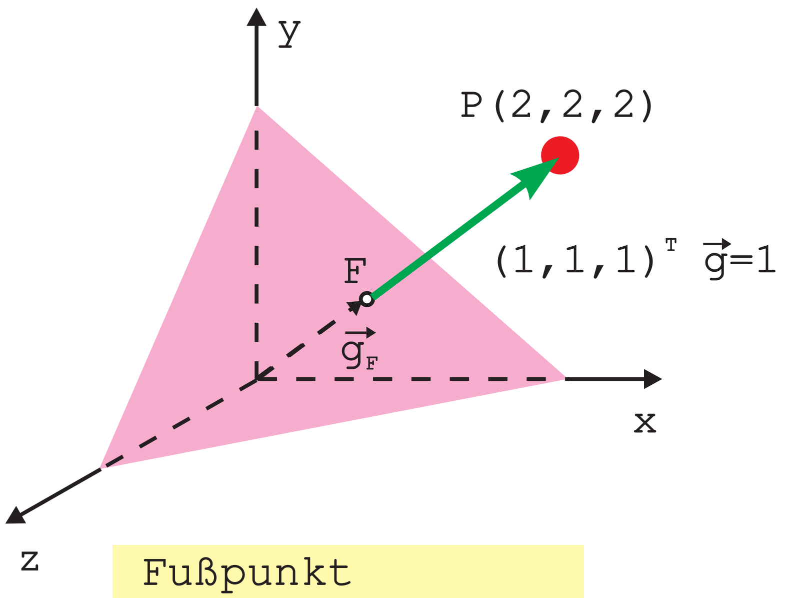
Schnittpunkt S

$$g_S = \vec{b} + \mu_S \vec{d}$$

$$\mu_S = \frac{k - \vec{N}\,\vec{b}}{\vec{d}\,\vec{N}}$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Beispiel zum Fußpunkt F des Lotes von P auf die Ebene



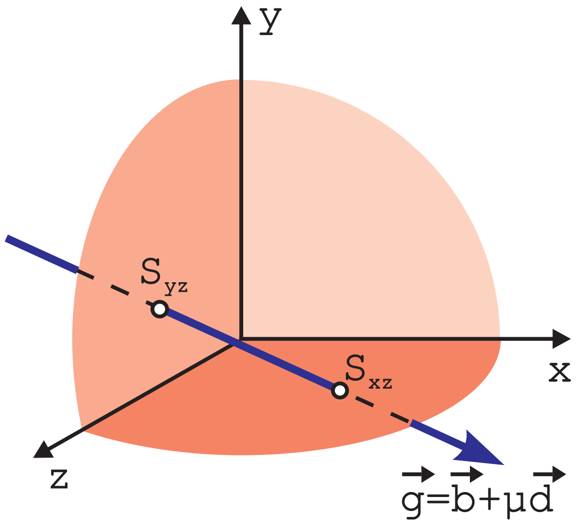
Fußpunkt

$\vec{N} = (1,1,1)^T, \quad k=1$

$$\mu_F = \frac{k - \vec{N}\,\vec{p}}{\vec{N}\,\vec{N}} = -\frac{5}{3}$$

$$\vec{g}_F = \vec{p} + \mu_F \vec{N} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$

Beispiel zum Schnittpunkt einer Geraden mit Ebenen



$\vec{b} = (-4, 6, 5)^T$

$\vec{d} = (8, -6, 0)^T$

$\vec{g}_s = \vec{b} + \mu_s \vec{d}$

$$\mu_s = \frac{k - \vec{N}\,\vec{b}}{\vec{d}\,\vec{N}}$$

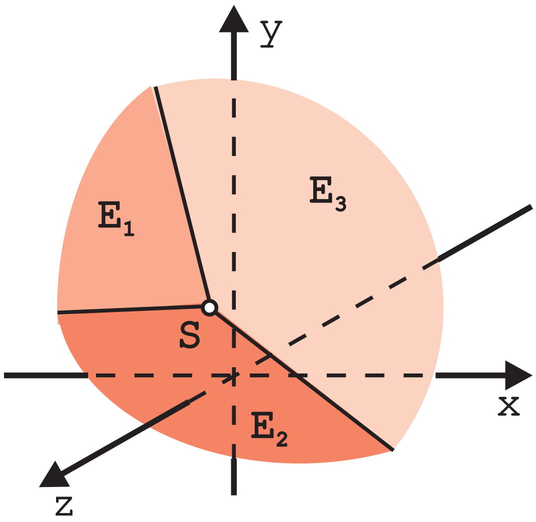
x-y-Ebene: $(0,0,1)^T\,\vec{g} = 0 \rightarrow \vec{d}\,\vec{N} = 0$

x-z-Ebene: $(0,1,0)^T\,\vec{g} = 0 \rightarrow \mu_s = 1, \quad \vec{g}_{xz} = (4,0,5)^T$

y-z-Ebene: $(1,0,0)^T\,\vec{g} = 0 \rightarrow \mu_s = 0.5, \quad \vec{g}_{yz} = (0,3,5)^T$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Schnittpunkt dreier Ebenen



Bedingung:
Parallele Ebenen dürfen nicht auftreten!

Ebenengleichungen

$E_1: \quad \vec{N}_1\vec{g}_1 = k_1$

$E_2: \quad \vec{N}_2\vec{g}_2 = k_2$

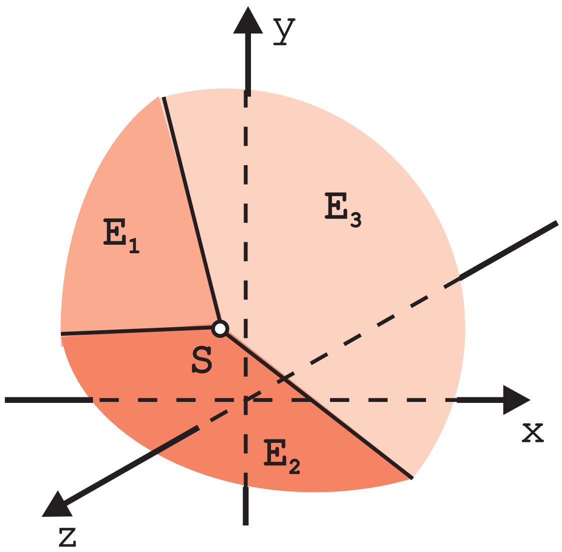
$E_3: \quad \vec{N}_3\vec{g}_3 = k_3$

Gleichungssystem für die Schnittpunktkoordinaten x_s, y_s, z_s

$$\begin{pmatrix} n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \\ n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \\ n_{3x} & n_{3y} & n_{3z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Beispiel zum Schnittpunkt dreier Ebenen



Ebenengleichungen

E_1: $(1,1,1)\,\vec{g}_1=1$

E_2: $(1,2,0)\,\vec{g}_2=2$

E_3: $(1,2,3)\,\vec{g}_3=4$

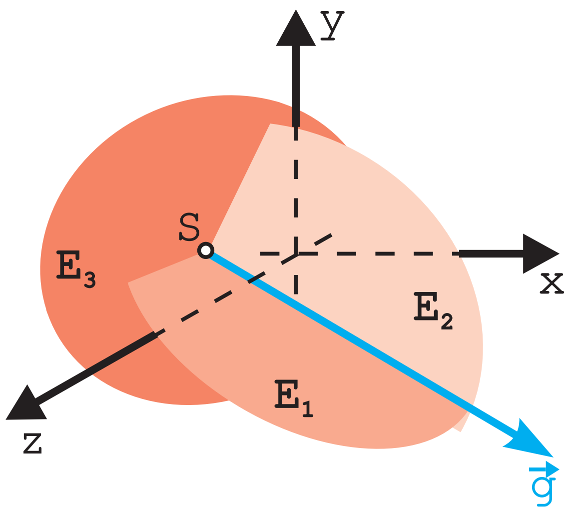
Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung: $x_s=-\frac{4}{3}$, $y_s=\frac{5}{3}$, $z_s=\frac{2}{3}$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Schnittgerade zweier Ebenen



Ebenengleichungen

E_1: $\vec{N}_1 \vec{g}_1 = k_1$

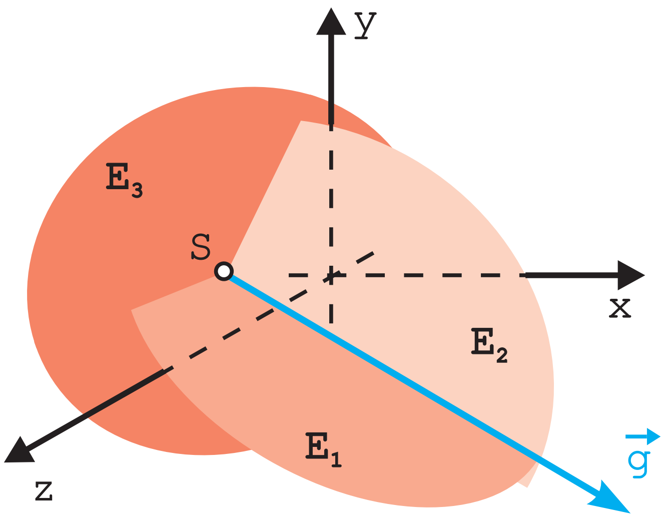
E_2: $\vec{N}_2 \vec{g}_2 = k_2$

Schnittgerade

$\vec{g} = \vec{b} + \mu (\vec{N}_1 \times \vec{N}_2)$

Der Basisvektor $\vec{b}$ ist mit der Hilfsebene E_3 zu bestimmen: $(\vec{N}_1 \times \vec{N}_2)\,\vec{g}_3 = 0$
(als Schnittpunkt von E_1, E_2 und E_3)

Beispiel zur Schnittgerade zweier Ebenen



Ebenengleichungen

E_1: $(1,1,1)^T\vec{g}_1=1$

E_2: $(1,2,0)^T\vec{g}_2=2$

E_3: $(-2,1,1)^T\vec{g}_3=0$

Schnittpunkt S

$\vec{b}=(\frac{2}{6},\frac{5}{6},-\frac{1}{6})^T$

Schnittgerade $\vec{g}$

$\vec{g}=(\frac{2}{6},\frac{5}{6},-\frac{1}{6})^T+\mu(-2,1,1)^T$