Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Transformationen und Projektionen

1. Transformationen im 3D-Raum
1.1 Vorbemerkungen
1.2 Affine Räume
1.3 Affine Abbildungen
1.4 Koordinatensysteme, homogene Koordinaten
1.5 Basistransformationen im Objektkoordinatensystem
1.5.1 Translation
1.5.2 Skalierung
1.5.3 Rotation
1.5.4 Scherung
1.6 Transformation vom Objekt- ins Observerkoordinatensystem
1.7 Nichtlineare Transformation

2. Projektionen
2.1 Vorbemerkungen
2.2 Parallelprojektion
2.2.1 Rechtwinklige Projektion
2.2.2 Schiefwinklige Projektion
2.3 Perspektivprojektion
2.3.1 Perspektivprojektion im 2D-Raum
2.3.2 Perspektivprojektion im 3D-Raum

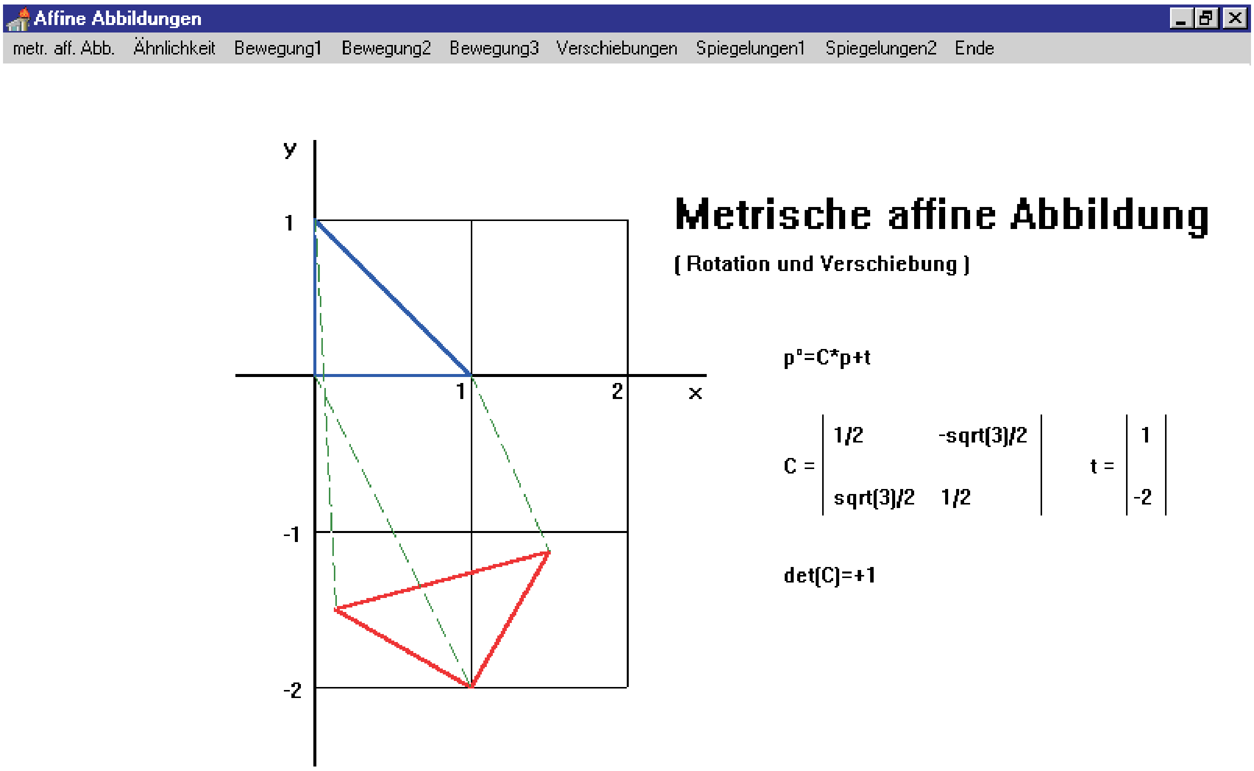
Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

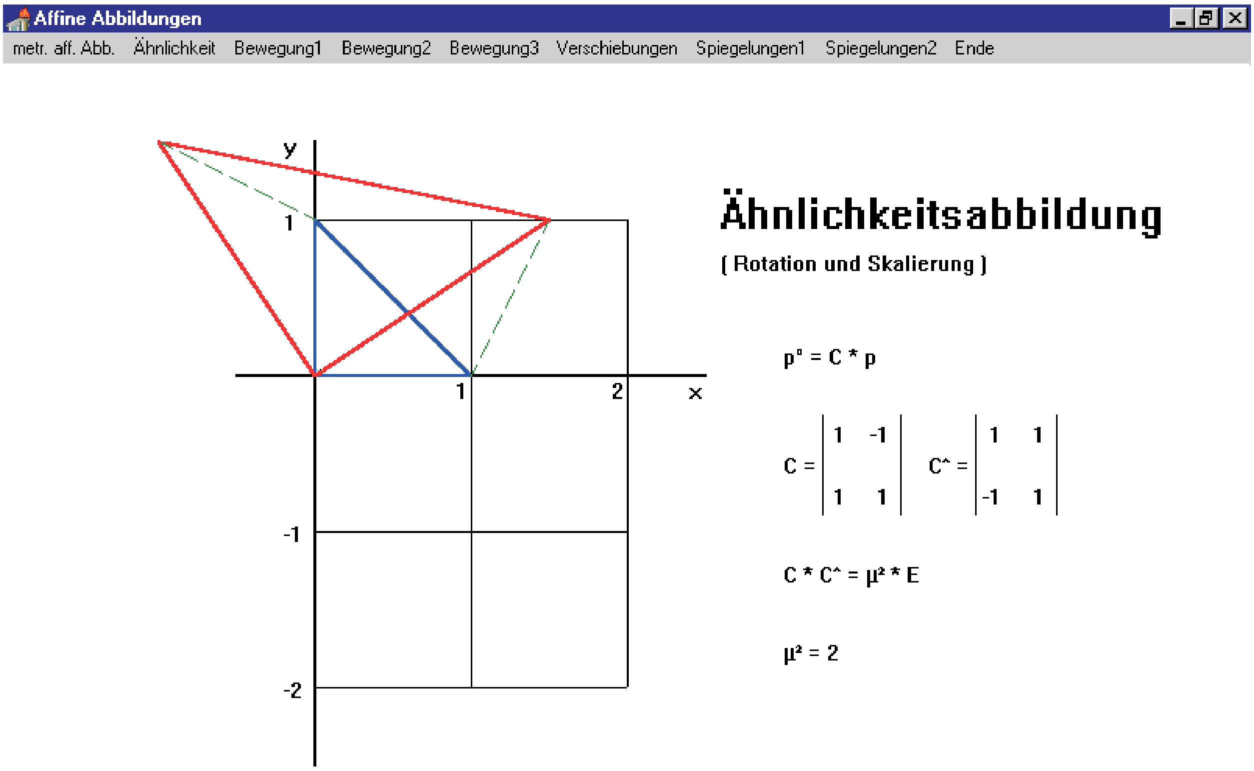
Affine Abbildungen

metrische affine Abbildungen	Ähnlichkeits-abbildungen, konstante Skalierung	Bewegungen, Verschiebungen, Rotationen	Verschiebungen, Translationen	Umlegungen, Spiegelungen
<u>Invarianzen</u>				
Längen Winkelbeträge Inhalte	Längen-verhältnisse Winkelbeträge	Längen Winkelgrößen Inhalte Orientierung	Längen Winkelgrößen Inhalte Orientierung	Längen Winkelbeträge Inhalte
<u>Charakteristika</u>				
$\overline{C}\,\overline{C}^T = \overline{E}$ $\det(\overline{C}) = 1$	$\overline{C}\,\overline{C}^T = \lambda^2 \overline{E}$ $\lambda > 0$	$\det(\overline{C}) = +1$	$\overline{C} = \overline{E}$	$\det(\overline{C}) = -1$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

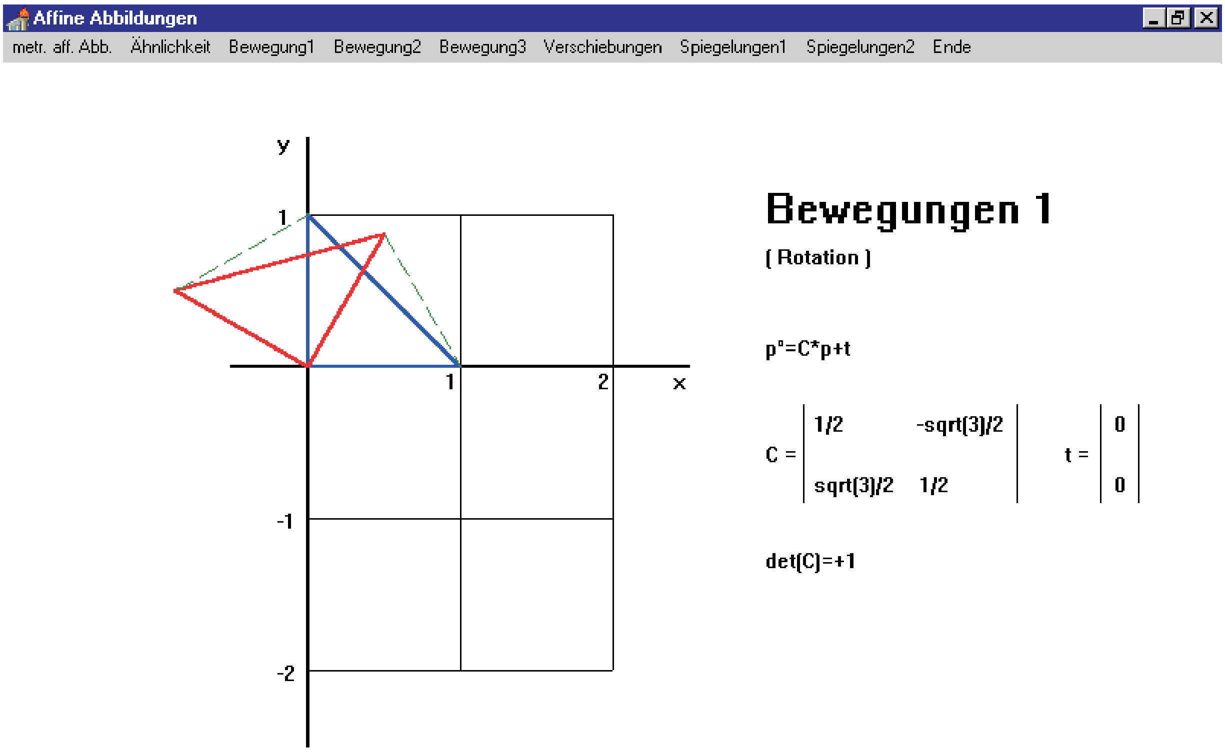
Affine Abbildungen

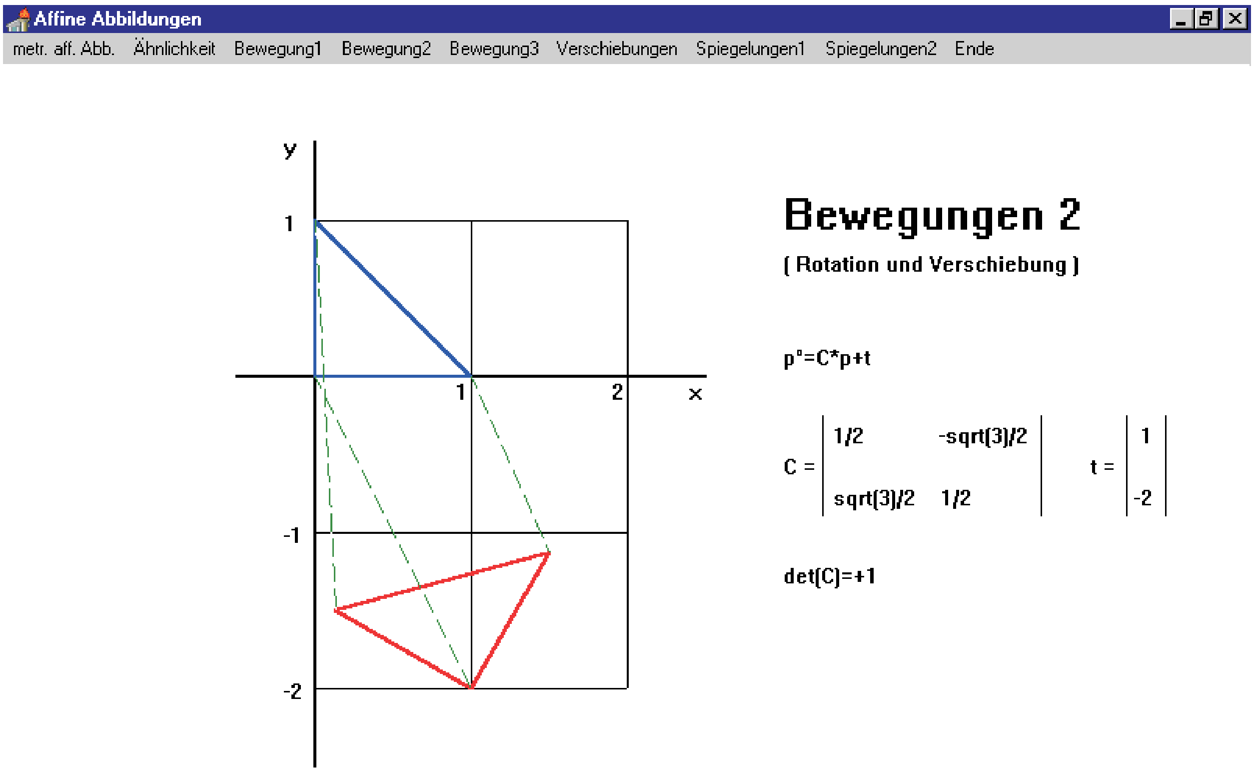




Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Affine Abbildungen



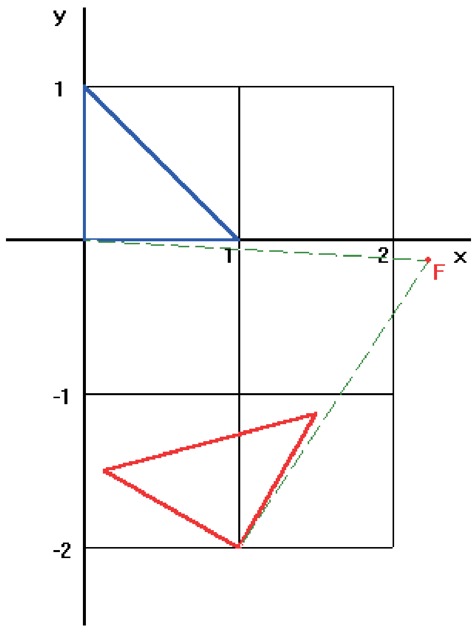


Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Affine Abbildungen

Affine Abbildungen

metr. aff. Abb.   Ähnlichkeit   Bewegung1   Bewegung2   Bewegung3   Verschiebungen   Spiegelungen1   Spiegelungen2   Ende



Bewegungen 3

(Rotation um den Fixpunkt F)

$p' = C * p + t$

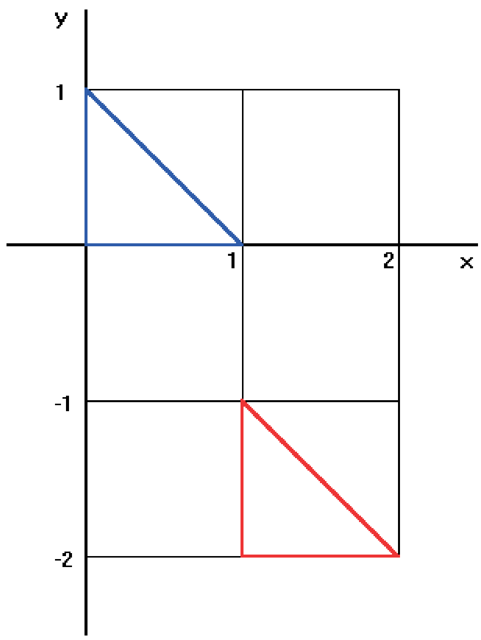
$$C = \begin{vmatrix} 1/2 & -\mathrm{sqrt}(3)/2 \\ \mathrm{sqrt}(3)/2 & 1/2 \end{vmatrix} \qquad t = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$\det(C) = +1$

Fixpunkt $xf = (1 + 2 * \mathrm{sqrt}(3)) / 2$
$yf = -(2 - \mathrm{sqrt}(3)) / 2$

Affine Abbildungen

metr. aff. Abb.   Ähnlichkeit   Bewegung1   Bewegung2   Bewegung3   Verschiebungen   Spiegelungen1   Spiegelungen2   Ende



Verschiebungen

(Translation)

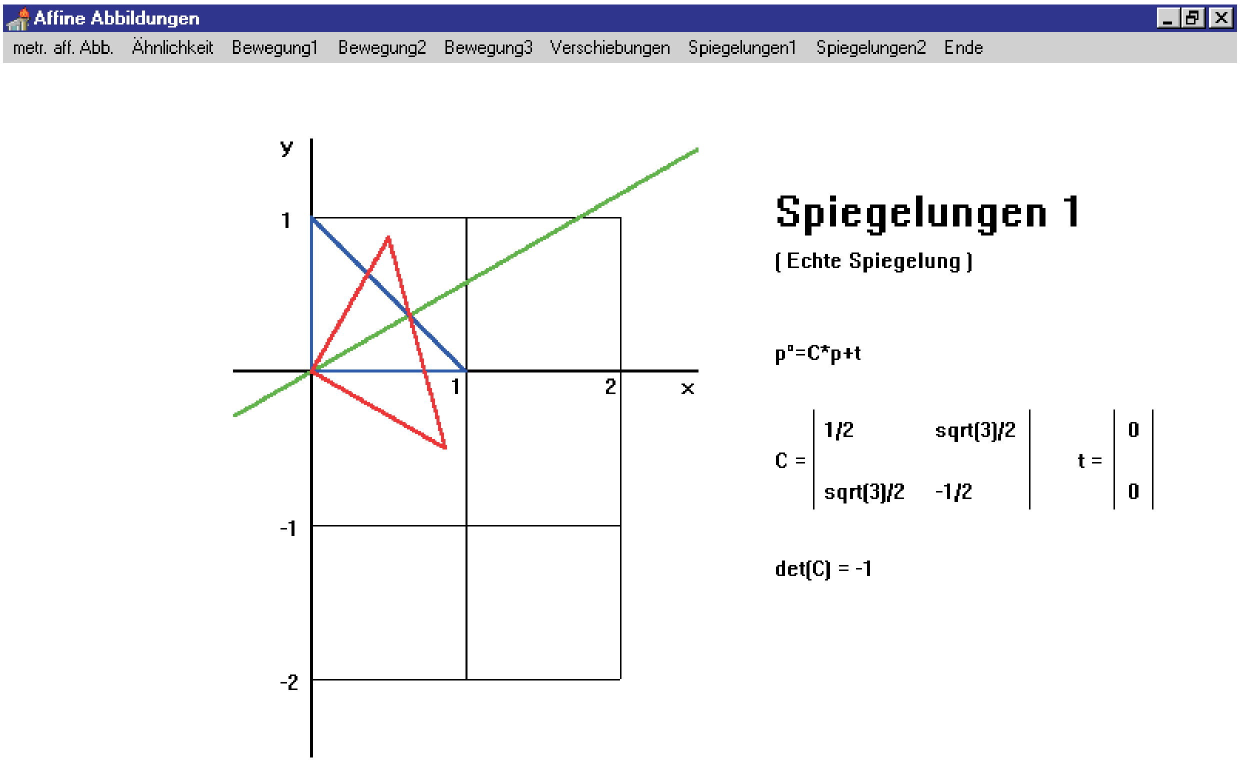
$p' = C * p + t = p + t$

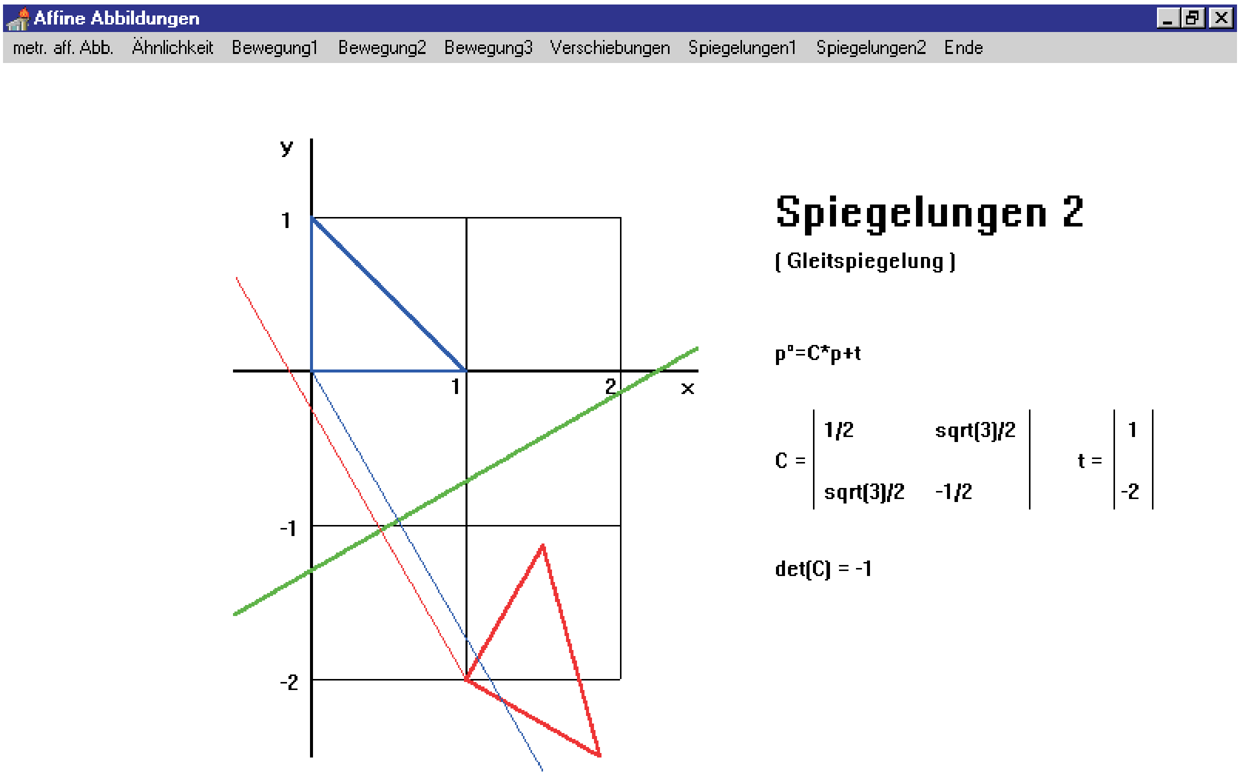
$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad t = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$C = E$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Affine Abbildungen





Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Affine Räume und Abbildungen (Zusammenfassung)

1. Affine Abbildungen
   - Geradentreue (Gerade wird auf Gerade abgebildet)
   - Parallelentreue (Parallele Geraden bleiben parallel)
   - Teilverhältnistreue (Teilverhältnisse bleiben erhalten)
   - Inzidenzerhaltend (Punkt/Gerade $\rightarrow$ Bildpunkt/Bildgerade)

2. Vektoren sind Differenzen von Punkten. Die Summe aus Punkt und Vektor ist ein Punkt.

3. Abbildungsgleichungen

   $\vec{p}^* = \bar{C} \cdot \vec{p} + \vec{t}$ oder $\vec{V}^* = \bar{C} \cdot \vec{V}$

   Die Abbildungsmatrix $\bar{C}$ ist quadratisch und regulär. Die Abbildung ist orthonormal, damit ergibt sich die inverse Matrix aus ihrer Transponierten.

   $\bar{C}^{-1} = \bar{C}^{T}$

4. Für affine Räume gilt allgemein:

   $$\vec{V} = \sum_{i=0}^{r} \mu_i \cdot \vec{V}_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{r} \mu_i = 1$$

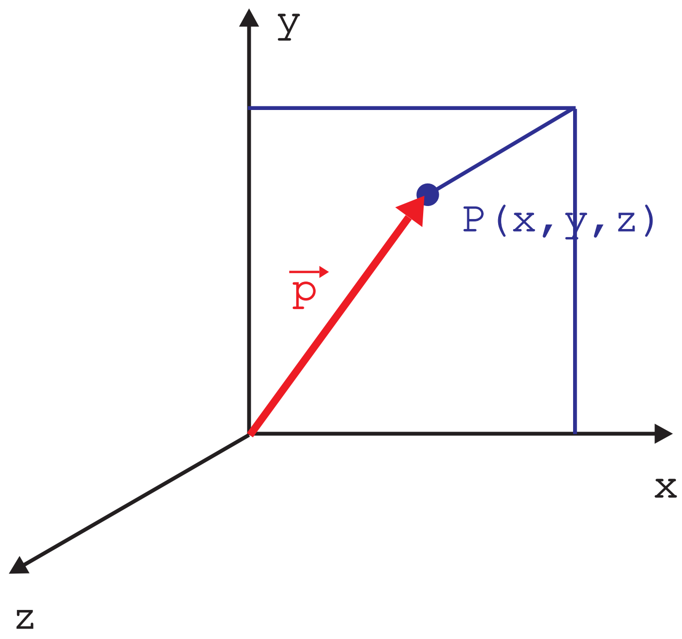
5. Aus den affinen Abbildungen gehen hervor:

   - Gerade $\vec{g} = \vec{v}_0 + \mu \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$

   - Dreieck $\vec{v} = \vec{v}_0 + \mu_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_0) + \mu_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_0)$

     mit $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ und $0 \leq \mu_1 + \mu_2 \leq 1$

3D-Punkt in homogenen Koordinaten



Ortsvektor in homogenen Koordinaten

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = (x,y,z,1)^T$$

Vorteile homogener Koordinaten:

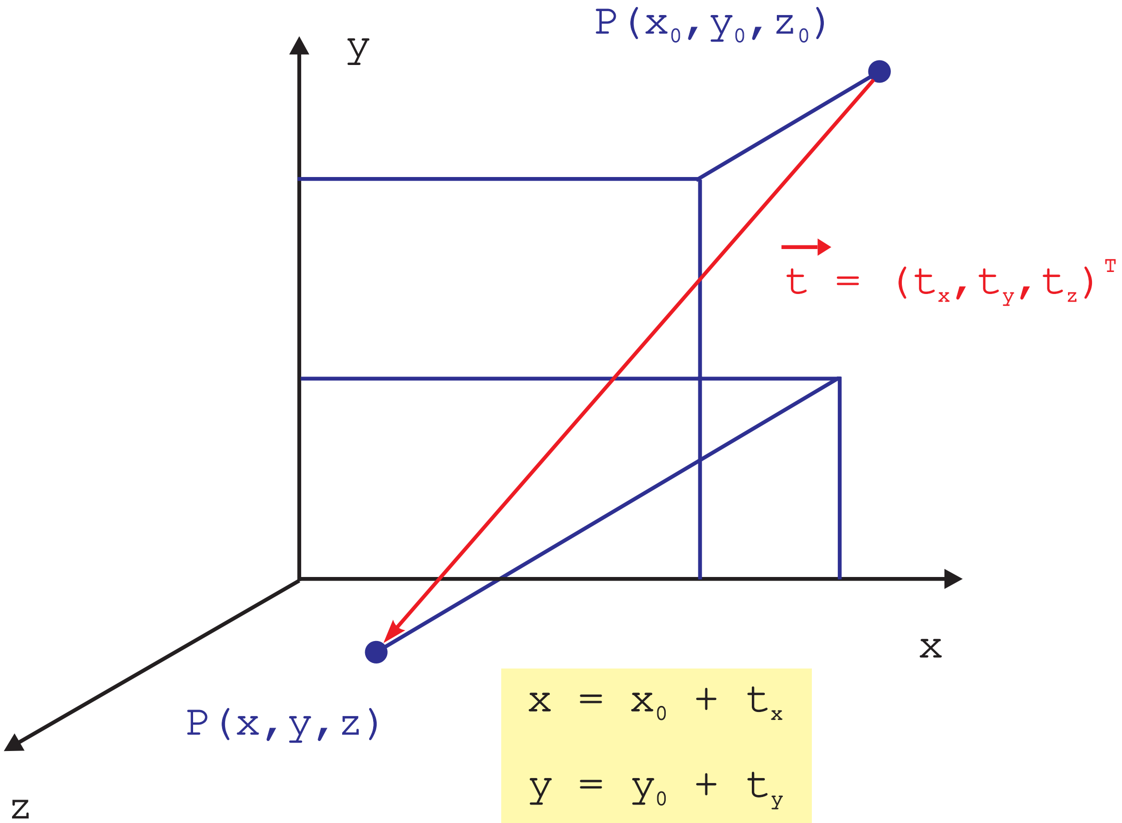
Einheitliche Behandlung aller Transformationen

Zusammenfassung komplexer Transformationen zu einer Gesamttransformationsmatrix

Einfache Umkehrung der Transformation durch Matrizeninversion

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Translation des Punktes P



$$x = x_0 + t_x$$

$$y = y_0 + t_y$$

$$z = z_0 + t_z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Translationsmatrizen

$$\overline{T}(\vec{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{T}^{-1}(\vec{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}^{-1}(\vec{t}) = \overline{T}(-\vec{t})$$

$$\overline{T}(\vec{t}_1+\vec{t}_2) = \overline{T}(\vec{t}_1) \cdot \overline{T}(\vec{t}_2)$$

Translation (Beispiel)

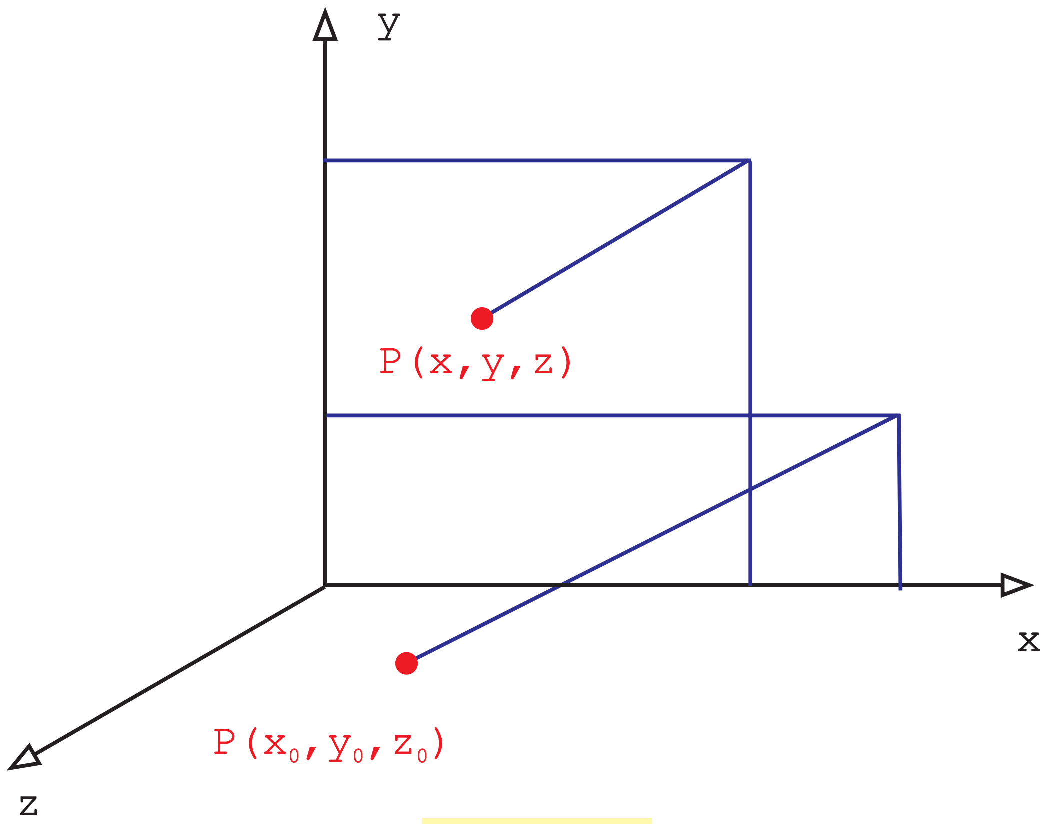
Translation des Punktes P(1,2,3) um den Vektor

$$\vec{t} = (1,-2,4)^T$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Skalierung des Punktes P



$$x = s_x \cdot x_0$$
$$y = s_y \cdot y_0$$
$$z = s_z \cdot z_0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skalierungssmatrizen

$$\bar{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{S}^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \bar{S}\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z}\right)$$

$$\bar{S}(s_{x1}s_{x2}, s_{y1}s_{y2}, s_{z1}s_{z2})$$

$$= \bar{S}(s_{x1}, s_{y1}, s_{z1}) \cdot \bar{S}(s_{x2}, s_{y2}, s_{z2})$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Translation und Skalierung (Beispiele)

Translation des Punktes P(1,2,3) um den Vektor

$$\vec{t} = (1,-2,4)^T$$

und nachfolgende Skalierung mit den Skalierungsfaktoren s_x=1, s_y=2, s_z=3.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung des Punktes P(1,2,3) mit den Skalierungsfaktoren s_x=1, s_y=2, s_z=3 und nachfolgende Translation um den Vektor

$$\vec{t} = (1,-2,4)^T$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gesamtmatrix für Skalierung und Translation (Beispiel)

Skalierung des Punktes $\overline{P}(1,2,3)$ mit den Skalierungsfaktoren $s_x=1$, $s_y=2$, $s_z=3$ und nachfolgende Translation um den Vektor

$$\vec{t} = (1,-2,4)^T$$

$$\overline{M}_{ges} = \overline{T}(\vec{t}) \cdot \overline{S}(s_x, s_y, s_z) \qquad \vec{p} = \overline{M}_{ges} \cdot \vec{p}_0$$

$$\overline{M}_{ges} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Skalierung relativ zu einem beliebigen Raumpunkt $R(r_x,r_y,r_z)$

Transformationsmatrix $\overline{S}_{rel}$ für die Skalierung bezüglich eines Punktes $R(r_x,r_y,r_z)$.

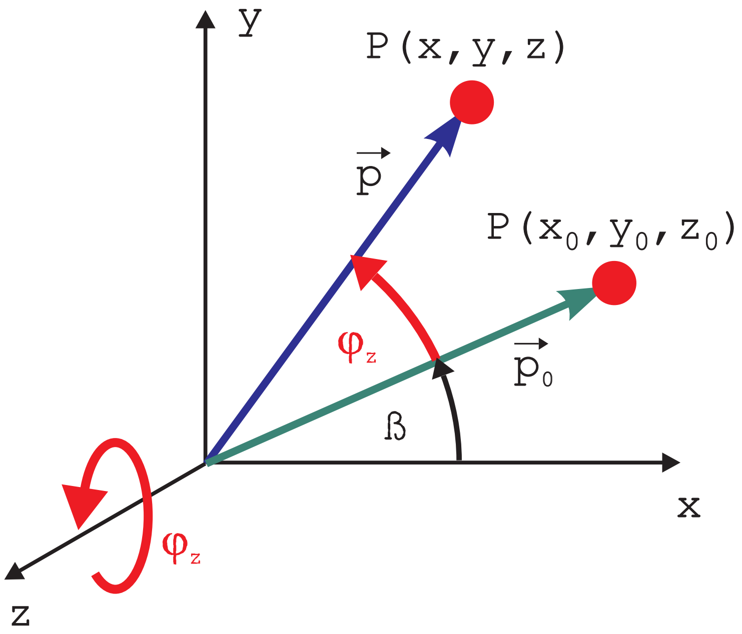
$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$$

$$\overline{S}_{rel}(\vec{r}, s_x, s_y, s_z) = \overline{T}(\vec{r}) \cdot \overline{S}(s_x, s_y, s_z) \cdot \overline{T}(-\vec{r})$$

$$\overline{S}_{rel}(\vec{r}, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & r_x(1-s_x) \\ 0 & s_y & 0 & r_y(1-s_y) \\ 0 & 0 & s_z & r_z(1-s_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Rotation um die z-Achse



$x_0 = r \cdot \cos ß \qquad y_0 = r \cdot \sin ß$

$x = r \cdot \cos(ß+\varphi_z) \quad y = r \cdot \sin(ß+\varphi_z)$

$$x = x_0 \cdot \cos\varphi_z - y_0 \cdot \sin\varphi_z$$
$$y = x_0 \cdot \sin\varphi_z + y_0 \cdot \cos\varphi_z$$
$$z = z_0$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Rotationsmatrizen bezüglich der Koordinatenachsen

$$\bar{R}_x(\varphi_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x & 0 \\ 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}_y(\varphi_y) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}_z(\varphi_z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 & 0 \\ \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation (Beispiele)

Rotation eines Punktes P(1,1,1) um jeweils 90^0 zuerst um die z-Achse und dann um die x-Achse.

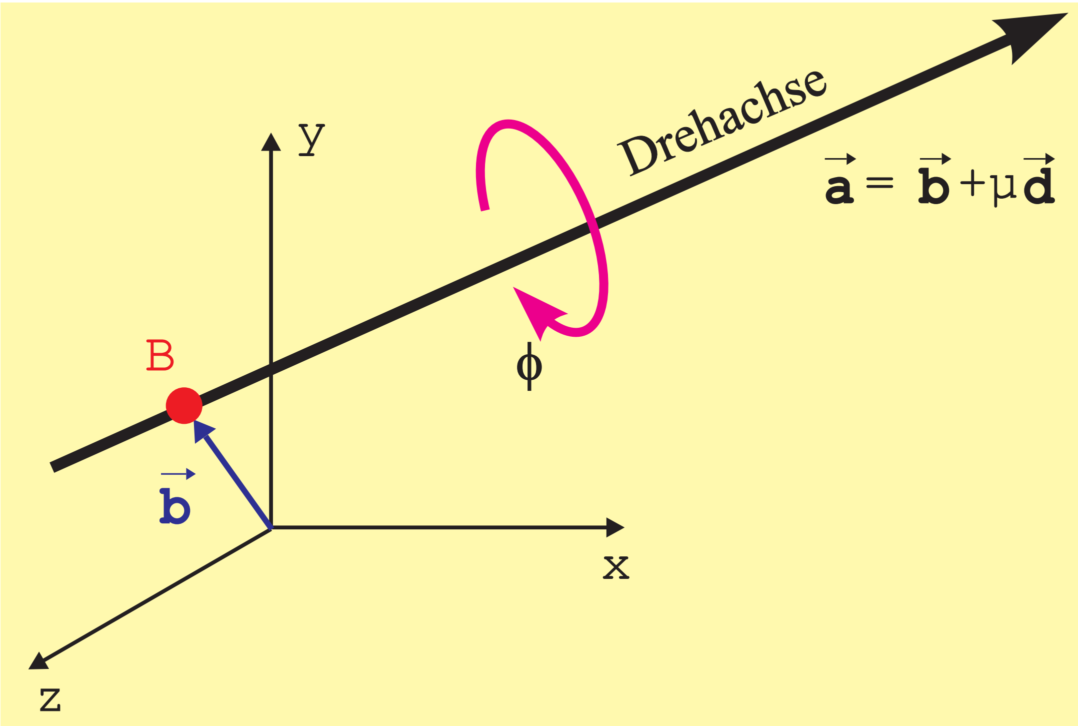
$$(x,y,z,1)^T = \overline{R}_x \cdot \overline{R}_z \cdot (1,1,1,1)^T = (-1,-1,1,1)^T$$

Rotation eines Punktes P(1,1,1) um jeweils 90^0 zuerst um die x-Achse und dann um die z-Achse.

$$(x,y,z,1)^T = \overline{R}_z \cdot \overline{R}_x \cdot (1,1,1,1)^T = (1,1,1,1)^T$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Rotation um eine beliebige Raumachse (1)



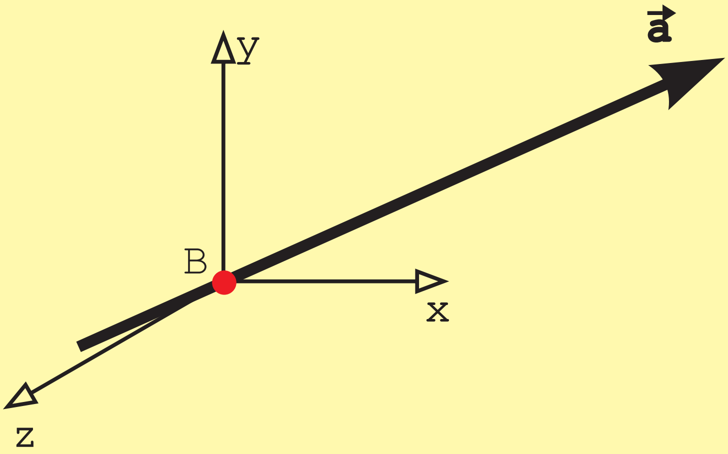
Transformationsschritte

1. Verschiebung von B in den Ursprung
2. Rotation der Drehachse $\vec{a}$ um die z-Achse in die xz-Ebene
3. Rotation der Drehachse $\vec{a}$ um die y-Achse in die z-Achse
4. Rotation um die z-Achse mit dem Winkel ϕ
5. Umkehrtransformationen der Schritte 1-3

Rotation um eine beliebige Raumachse (2)

1. Schritt:

Verschieben von B in den Ursprung

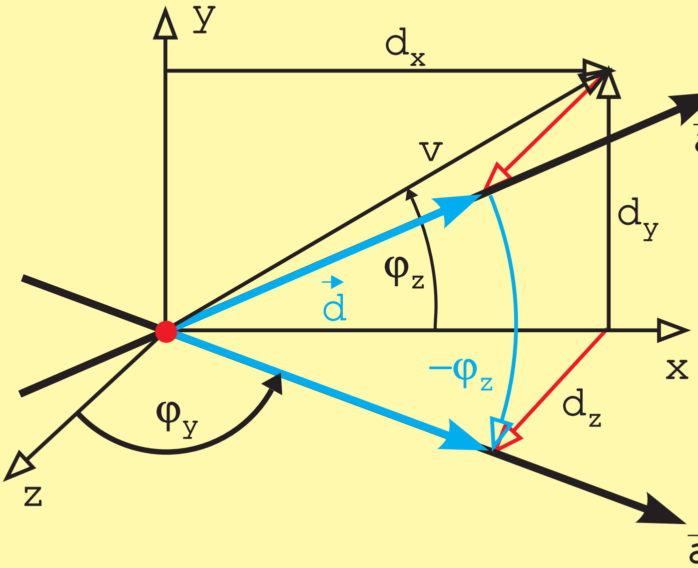


$$\bar{T}(-\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -b_x \\ 0 & 1 & 0 & -b_y \\ 0 & 0 & 1 & -b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um eine beliebige Raumachse (3)

2. Schritt:

Rotation von $\vec{a}$ um die z-Achse in die xz-Ebene



$$v = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$$

$$\sin\varphi_z = d_y / v$$

$$\cos\varphi_z = d_x / v$$

$$\overline{R}_z(-\varphi_z) = \begin{pmatrix} d_x/v & d_y/v & 0 & 0 \\ -d_y/v & d_x/v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Rotation um eine beliebige Raumachse (4)

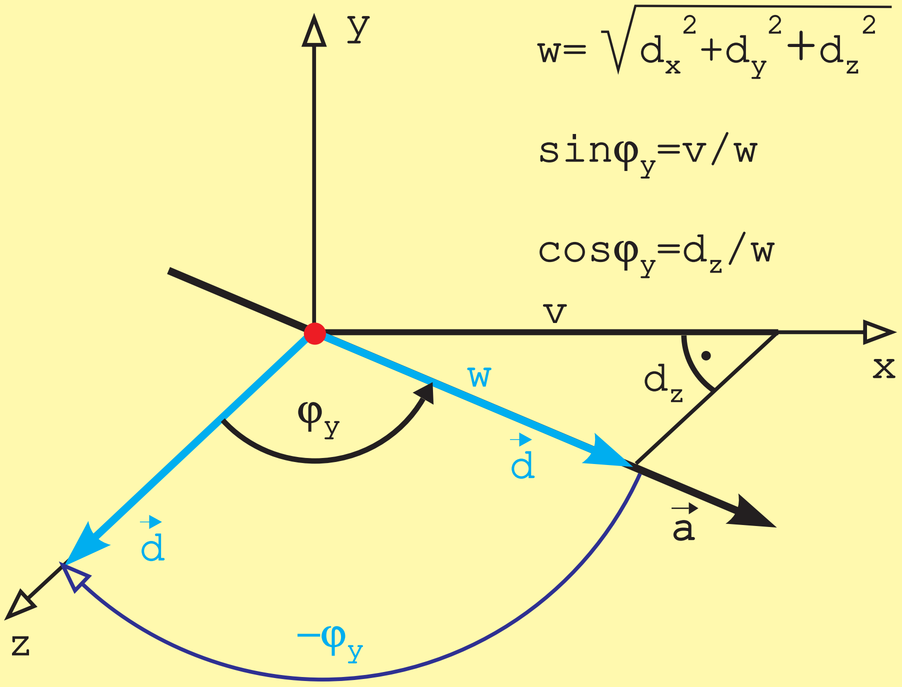
3. Schritt:

Rotation von $\vec{a}$ um die y-Achse in die z-Achse

$$w = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$\sin\varphi_y = v/w$$

$$\cos\varphi_y = d_z/w$$

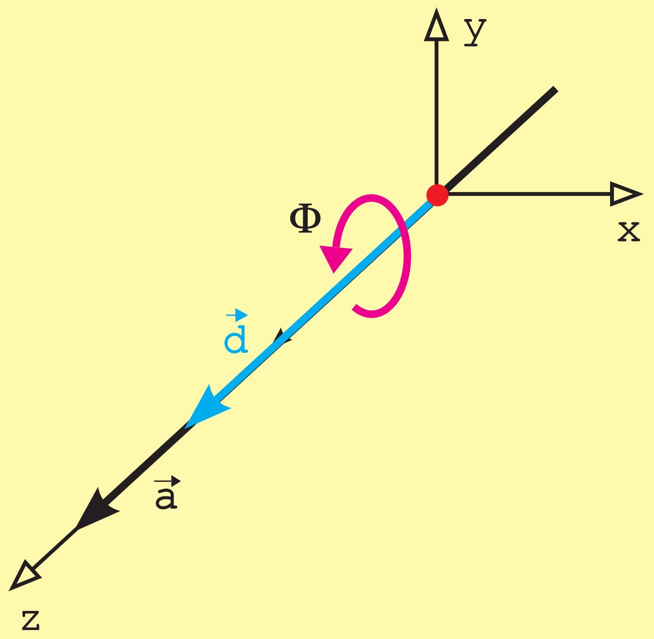


$$\overline{R}_y(-\varphi_y) = \begin{pmatrix} d_z/w & 0 & -v/w & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v/w & 0 & d_z/w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um eine beliebige Raumachse (5)

4. Schritt:

Rotation mit Φ um die z-Achse



$$\bar{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um eine beliebige Raumachse (6)

5. Schritt:

Gesamtmatrix für die Rotation mit Φ um die Raumachse $\vec{a}$

$$\bar{R}_{ges} = \bar{T}(\vec{b})\,\bar{R}_z(\varphi_z)\,\bar{R}_y(\varphi_y)\,\bar{R}_z(\phi)\,\bar{R}_y(-\varphi_y)\,\bar{R}_z(-\varphi_z)\,\bar{T}(-\vec{b})$$

$$\bar{R}_{ges} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um eine beliebige Raumachse (7)

Koeffizienten der Transformationsmatrix $\overline{R}_{ges}$

$$R_{11}=[(d_y^2+d_z^2)\cos\phi+d_x^2]/w^2$$

$$R_{12}=[d_xd_y(1-\cos\phi)-wd_z\sin\phi]/w^2$$

$$R_{13}=[d_xd_z(1-\cos\phi)+wd_y\sin\phi]/w^2$$

$$R_{14}=\{[b_x(d_y^2+d_z^2)-b_yd_xd_y-b_zd_xd_z](1-\cos\phi)$$
$$+w(b_yd_z-b_zd_y)\sin\phi\}/w^2$$

$$R_{21}=[d_xd_y(1-\cos\phi)+wd_z\sin\phi]/w^2$$

$$R_{22}=[(d_x^2+d_z^2)\cos\phi+d_y^2]/w^2$$

$$R_{23}=[d_yd_z(1-\cos\phi)-wd_x\sin\phi]/w^2$$

$$R_{24}=\{-[b_xd_xd_y-b_y(d_x^2+d_z^2)+b_zd_yd_z](1-\cos\phi)$$
$$-w(b_xd_z-b_zd_x)\sin\phi\}/w^2$$

$$R_{31}=[d_xd_z(1-\cos\phi)-wd_y\sin\phi]/w^2$$

$$R_{32}=[d_yd_z(1-\cos\phi)+wd_x\sin\phi]/w^2$$

$$R_{33}=[(d_x^2+d_y^2)\cos\phi+d_z^2]/w^2$$

$$R_{34}=\{-[b_xd_xd_z+b_yd_yd_z-b_z(d_x^2+d_y^2)](1-\cos\phi)$$
$$+w(b_xd_y-b_yd_x)\sin\phi\}/w^2$$

Rotation um eine Raumachse durch den Ursprung (1)

Koeffizienten der Transformationsmatrix

Voraussetzung: Der Richtungsvektor $\vec{d}$ der Drehachse $\vec{a}$ ist normiert ($w=\sqrt{d_x^2+d_y^2+d_z^2} = 1$).

$R_{11}=[(d_y^2+d_z^2)\cos\phi+d_x^2]$

$R_{12}=[d_x d_y(1-\cos\phi)-d_z\sin\phi]$

$R_{13}=[d_x d_z(1-\cos\phi)+d_y\sin\phi]$

$R_{14}= 0$

$R_{21}=[d_x d_y(1-\cos\phi)+d_z\sin\phi]$

$R_{22}=[(d_x^2+d_z^2)\cos\phi+d_y^2]$

$R_{23}=[d_y d_z(1-\cos\phi)-d_x\sin\phi]$

$R_{24}= 0$

$R_{31}=[d_x d_z(1-\cos\phi)-d_y\sin\phi]$

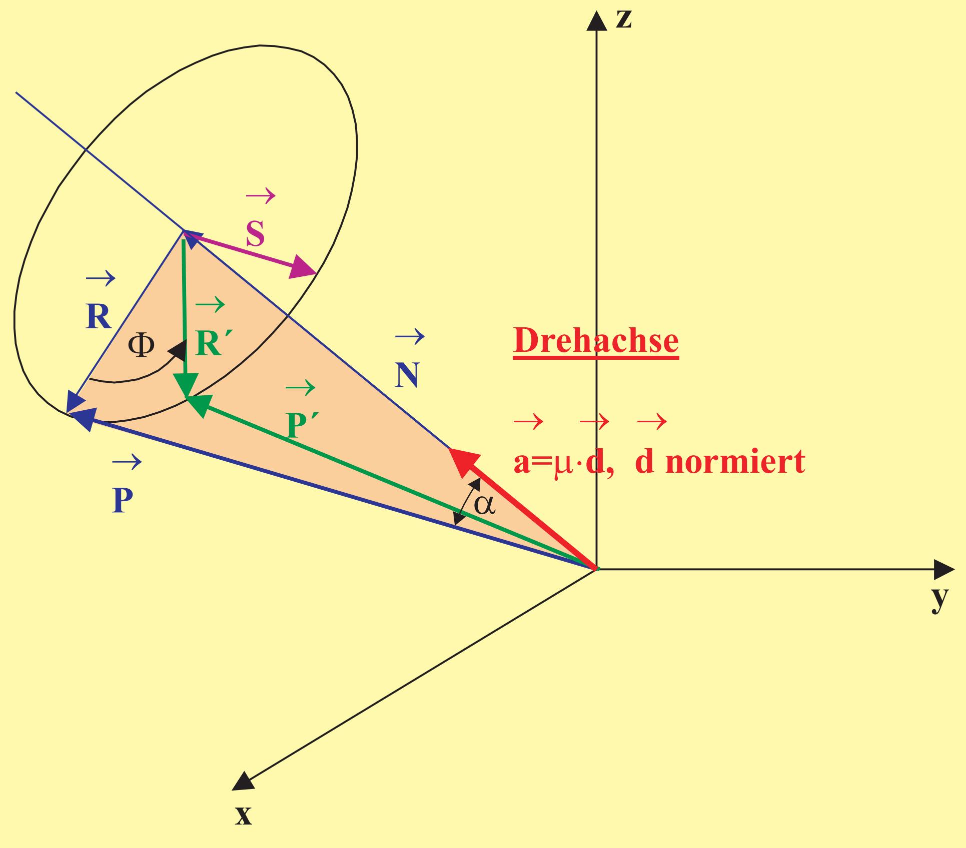
$R_{32}=[d_y d_z(1-\cos\phi)+d_x\sin\phi]$

$R_{33}=[(d_x^2+d_y^2)\cos\phi+d_z^2]$

$R_{34}= 0$

Rotation um eine Raumachse durch den Ursprung (2)

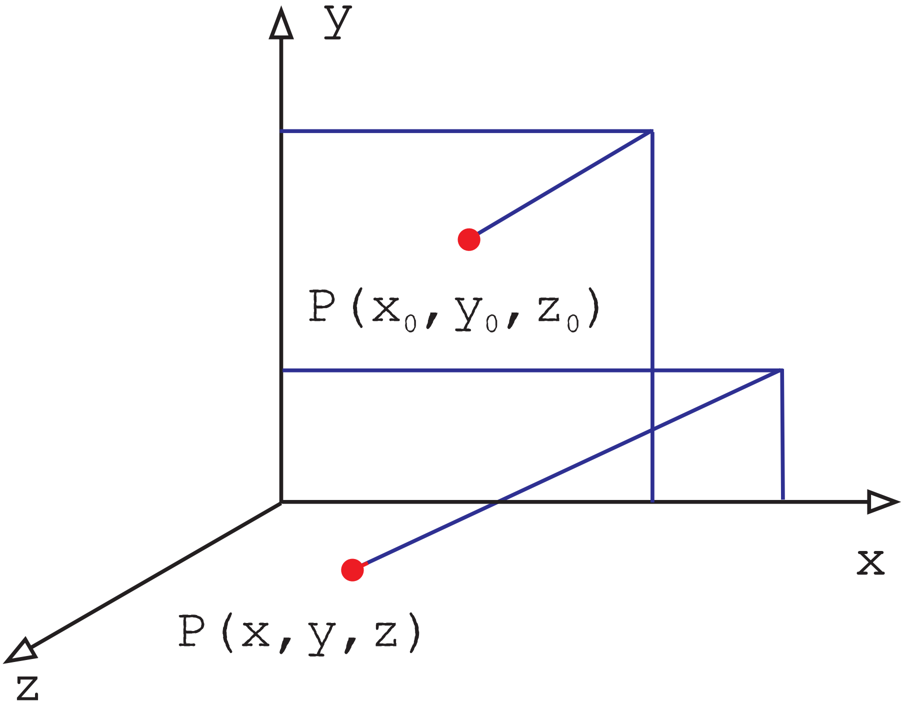
Voraussetzung: Der Richtungsvektor $\vec{d}$ der Drehachse $\vec{a}$ ist normiert ($|d|=\sqrt{d_x^2+d_y^2+d_z^2} = 1$).



$$\vec{P}' = \vec{P}\cdot\cos\Phi + (1 - \cos\Phi)\cdot(\vec{d}\cdot\vec{P})\cdot\vec{d} + (\vec{d}\times\vec{P})\cdot\sin\Phi$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Scherung des Punktes P



$$x = x_0 + s_1 y_0 + s_2 z_0$$

$$y = s_3 x_0 + y_0 + s_4 z_0$$

$$z = s_5 x_0 + s_6 y_0 + z_0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 & 0 \\ s_3 & 1 & s_4 & 0 \\ s_5 & s_6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

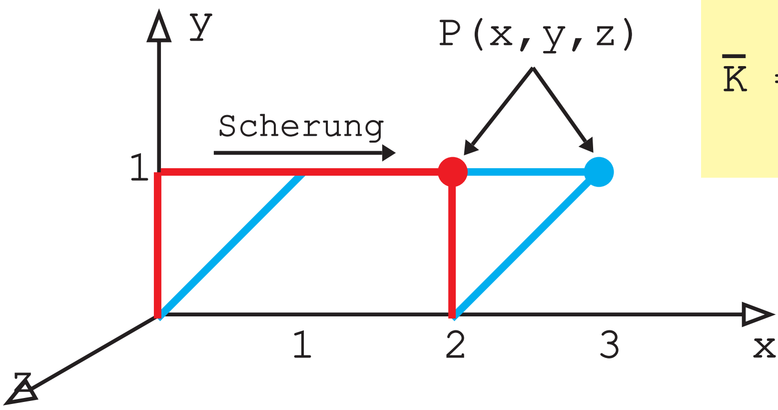
Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Scherungsmatrix und Beispiel

$$\overline{K} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 & 0 \\ s_3 & 1 & s_4 & 0 \\ s_5 & s_6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

s_1 und s_2 $\longrightarrow$ Scherung in x-Richtung
s_3 und s_4 $\longrightarrow$ Scherung in y-Richtung
s_5 und s_6 $\longrightarrow$ Scherung in z-Richtung

Scherung mit $s_1=1$ und $s_2=s_3=s_4=s_5=s_6=0$



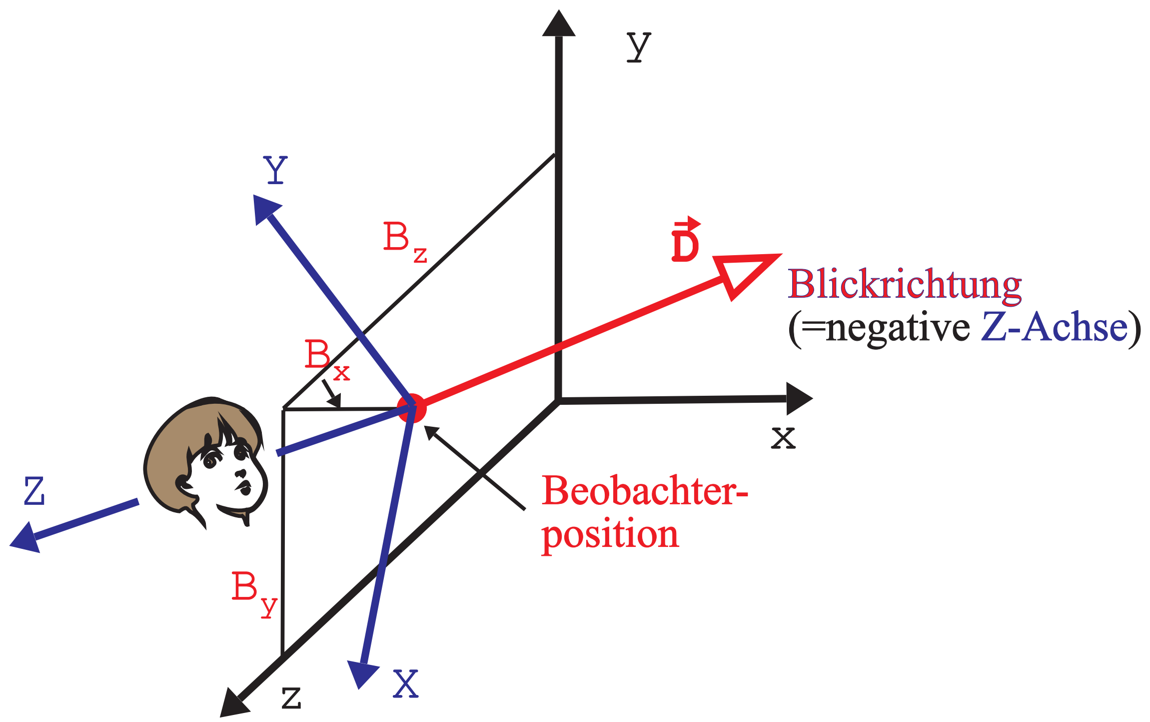
$$\overline{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(0,1,0,1)^T \longrightarrow (1,1,0,1)^T$

$(2,1,0,1)^T \longrightarrow (3,1,0,1)^T$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Transformation vom Objekt- ins Observersystem



Transformationsschritte

1. Translation des Ursprungs des Observer- in den des Objektsystems
2. Rotation des Objektsystems um die z-Achse des Observersystems in die x-z-Ebene des Objektsystems
3. Rotation um die y-Achse des Objektsystems bis die z-Achsen beider Systeme deckungsgleich sind
4. Rotation um die (nunmehr gemeinsame) z-Achse zur “Beibehaltung der Vertikalen"

Transformation vom Objekt- ins Observersystem

Rotationsachse für die Transformation vom Objekt- ins Observersystem

$$\vec{A}=\vec{B}+\mu\vec{D}=(B_x,B_y,B_z)^T+\mu(-D_x,-D_y,-D_z)^T$$

Schritt 1: Translation des Ursprungs des Objektsystems in den des Observersystems

$$\overline{T}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -B_x \\ 0 & 1 & 0 & -B_y \\ 0 & 0 & 1 & -B_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformation vom Objekt- ins Observersystem

Schritt 2: Rotation des Objektsystems um die z-Achse des Observersystems in die x-z-Ebene des Objektsystems

$$\overline{R}_z = \begin{pmatrix} -D_x/V & -D_y/V & 0 & 0 \\ D_y/V & -D_x/V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Rotation um die y-Achse des Objektsystems bis die z-Achsen beider Systeme deckungsgleich sind

$$\overline{R}_y = \begin{pmatrix} -D_z/W & 0 & -V/W & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ V/W & 0 & -D_z/W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}\ ,\quad W = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2}$$

Transformation vom Objekt- ins Observersystem

Die Gesamttransformation für die Schritte 1 bis 3 lautet

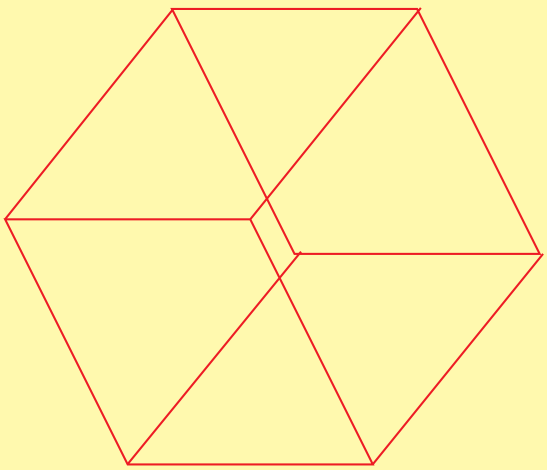
$$\overline{T}_1 = \overline{R}_y \overline{R}_z \overline{T}$$

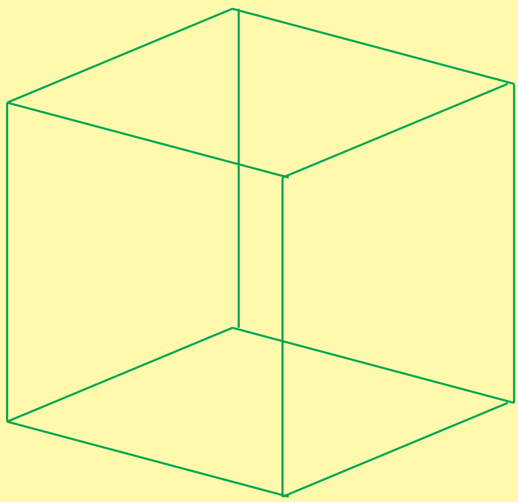
$$\overline{T}_1 = \begin{pmatrix} \frac{D_x D_z}{VW} & \frac{D_y D_z}{VW} & -\frac{V^2}{VW} & -\frac{(B_x D_x D_z + B_y D_y D_z - B_z V^2)}{VW} \\ \frac{D_y}{V} & -\frac{D_x}{V} & 0 & -\frac{(B_x D_y - B_y D_x)}{V} \\ -\frac{D_x}{W} & -\frac{D_y}{W} & -\frac{D_z}{W} & \frac{(B_x D_x + B_y D_y + B_z D_z)}{W} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformation vom Objekt- ins Observersystem

Ohne Beibehaltung der Vertikalen

Mit Beibehaltung der Vertikalen





Transformation vom Objekt- ins Observersystem

Schritt 4: Rotation um die (gemeinsame) z-Achse zur "Beibehaltung der Vertikalen"

Bedingung: Die Gerade des Objektsystems

$$\vec{g} = (B_x, B_y, B_z, 1)^T + \mu(0,0,1,1)^T$$

muss in eine Gerade der Form

$$\vec{G} = (0,0,0,1)^T + \bar{\mu}(0, \bar{y}, \bar{z}, 1)^T$$

des Observersystems übergehen

"Beibehaltung der Vertikalen" bedeutet, dass die Z-Achse des Observersystems in der y-z-Ebene des Objektsystems liegt

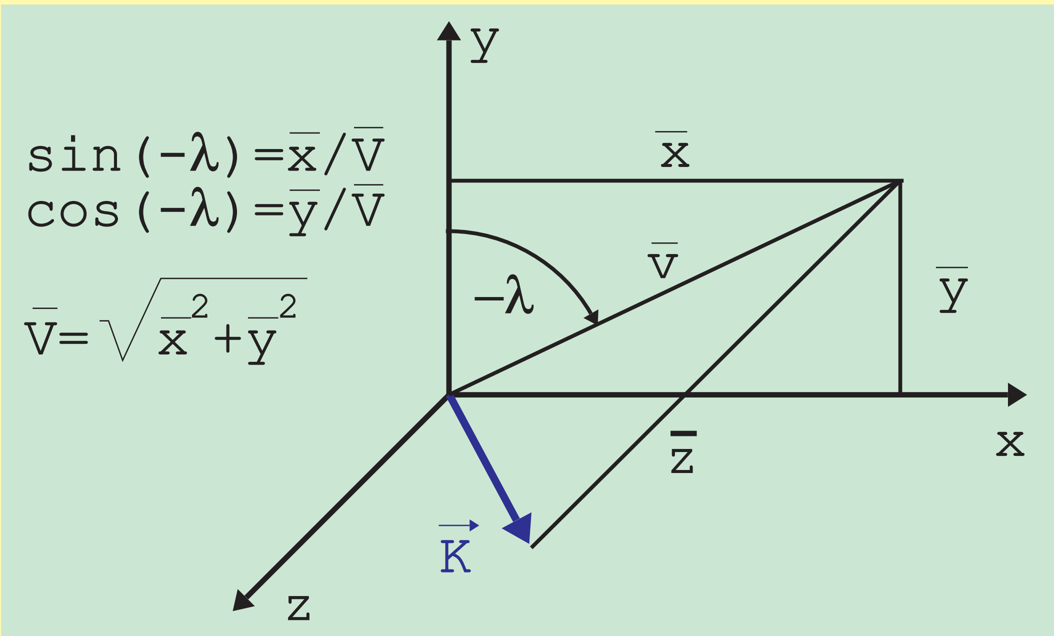
$$\bar{T}_1 \vec{g} = \bar{T}_1 \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z + \mu \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mu}{W} \begin{pmatrix} -V \\ 0 \\ -D_z \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{\mu} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{K}$$

Diese Gerade $\vec{K}$ liegt noch nicht in der y-z-Ebene des Objektsystems. Sie muss deshalb noch um den Winkel λ um die (gemeinsame) z-Achse gedreht werden

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Transformation vom Objekt- ins Observersystem

Transformation zur "Beibehaltung der Vertikalen"



Transformation vom Objekt- ins Observersystem

Mit $\sin\lambda = -\overline{x}/\overline{V}$, $\cos\lambda = \overline{y}/\overline{V}$ und $\overline{V} = \sqrt{\overline{x}^2 + \overline{y}^2}$ ergibt sich die Transformationsmatrix zu

$$\overline{R}_\lambda = \begin{pmatrix} \overline{y}/\overline{V} & -\overline{x}/\overline{V} & 0 & 0 \\ \overline{x}/\overline{V} & \overline{y}/\overline{V} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\overline{x} = -V$, $\overline{y} = 0$, $\overline{z} = -D_z$, $\overline{V} = V$.

Transformation vom Objekt- ins Observersystem

Die Gesamttransformationsmatrix für die Transformation vom Objekt- ins Observerkoordinatensystem lautet

$$\overline{P}=\overline{R}_{\lambda}\overline{T}_{1}=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten der Gesamttransformationsmatrix

$P_{11}=D_y/V \qquad P_{12}=-D_x/V \qquad P_{13}=0$

$P_{14}=-(B_xD_y-B_yD_x)/V$

$P_{21}=-D_xD_z/(VW) \qquad P_{22}=-D_yD_z/(VW) \qquad P_{23}=V^2/(VW)$

$P_{24}=(B_xD_xD_z+B_yD_YD_Z+B_zV^2)/(VW)$

$P_{31}=-D_x/W \qquad P_{32}=-D_y/W \qquad P_{33}=-D_z/W$

$P_{34}=(B_xD_x+B_yD_y+B_zD_z)/W$

Transformation vom Objekt- ins Observersystem

Transformation des im Objektsystem definierten Einheitswürfels in das durch

$Bx=1,\ By=1,\ Bz=1$

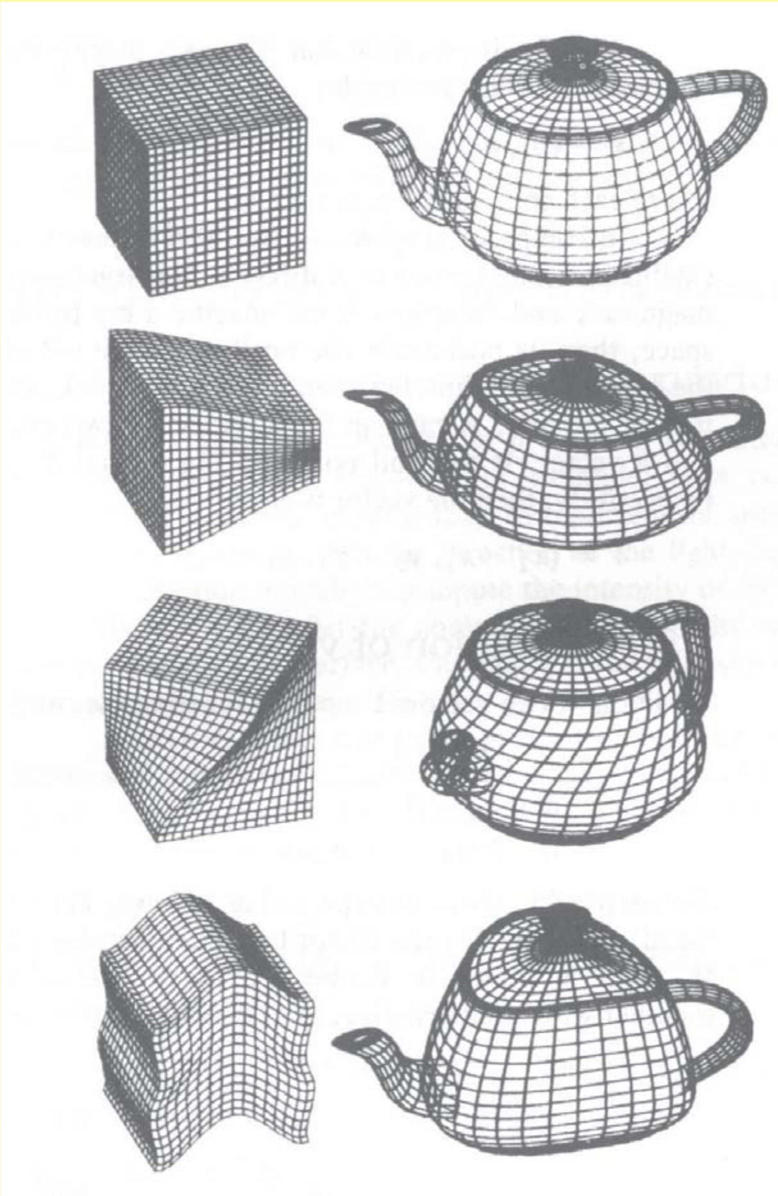
$Dx=-1,\ Dy=-2,\ Dz=-3$

definierte Observersystem.

$$\overline{P}=\overline{R}_{\lambda}\overline{T}_{1}=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Deformation durch nichtlineare Transformation (1)



Originalobjekte

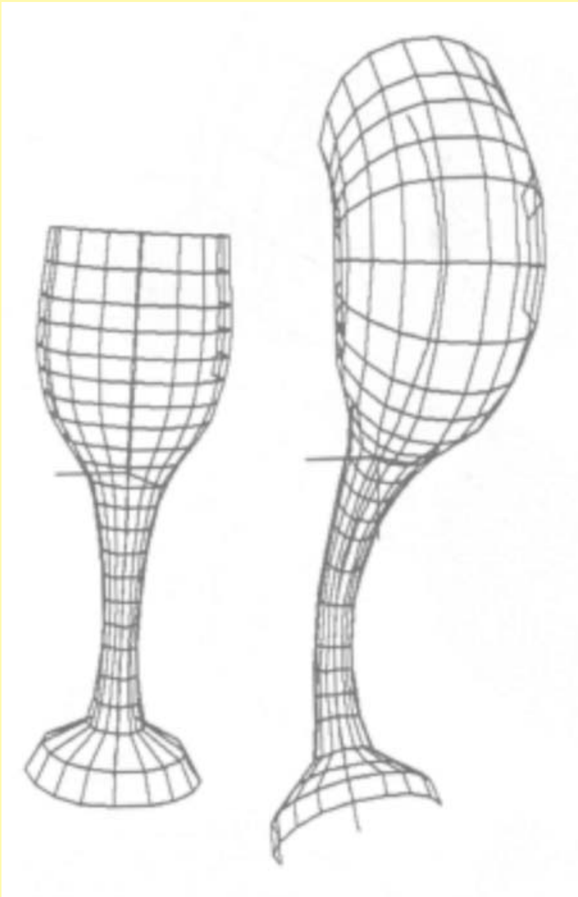
Tapering
Dehnung, Verjüngung

Twisting
Verdrehung, Torsion

Bending
Biegung, Krümmung

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Deformation durch nichtlineare Transformation (2)

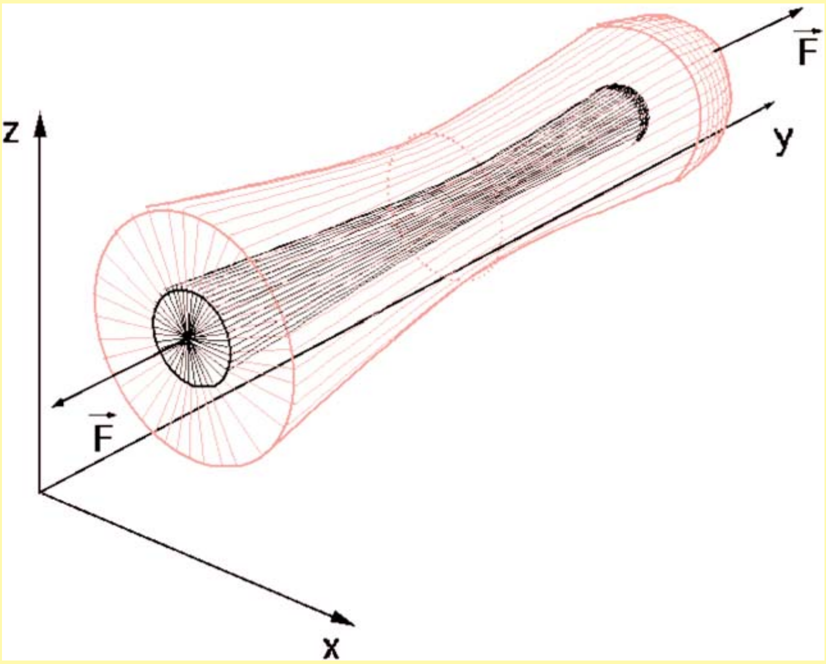


Kombination von Tapering und Bending

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Deformation durch nichtlineare Transformation (3)

Tapering (Dehnung, Verjüngung)



$$P' = D_s(P)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x(y) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s_z(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

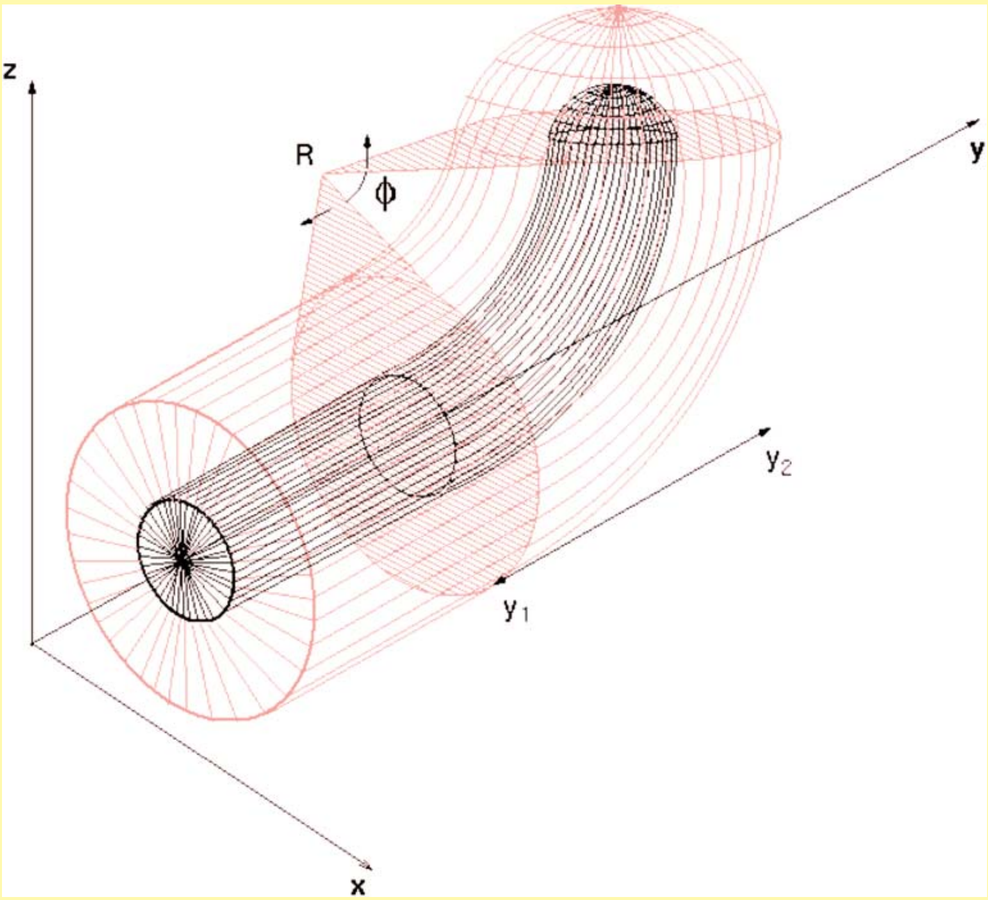
Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Deformation durch nichtlineare Transformation (8)

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Deformation durch nichtlineare Transformation (4)

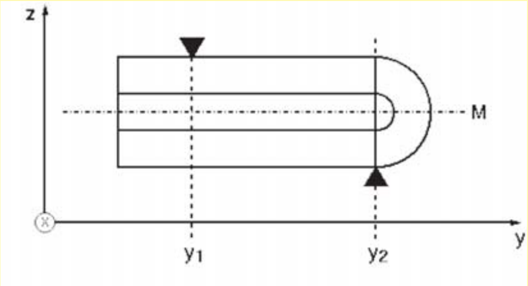
Bending (Biegung, Krümmung)

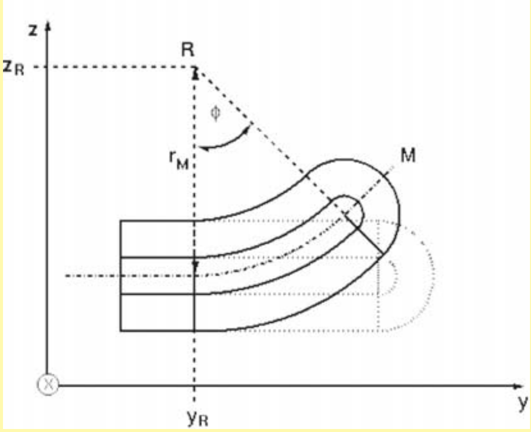


Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Deformation durch nichtlineare Transformation (5)

Bending





$$x' = x$$

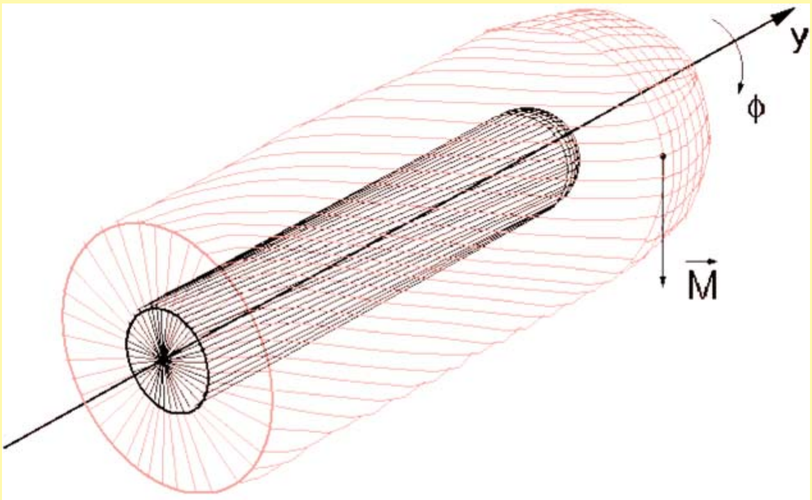
$$y' = \begin{cases} -\sin\Phi(z-r) + y_r & y_l \le y \le y_2 \\ -\sin\Phi(z-r) + y_r + \cos\Phi(y-y_l) & y < y_l \\ -\sin\Phi(z-r) + y_r + \cos\Phi(y-y_2) & y > y_2 \end{cases}$$

$$z' = \begin{cases} \cos\Phi(z-r) + r & y_l \le y \le y_2 \\ \cos\Phi(z-r) + r + \sin\Phi(y-y_l) & y < y_l \\ \cos\Phi(z-r) + r + \sin\Phi(y-y_2) & y > y_2 \end{cases}$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Deformation durch nichtlineare Transformation (6)

Twisting (Verdrehung, Torsion)

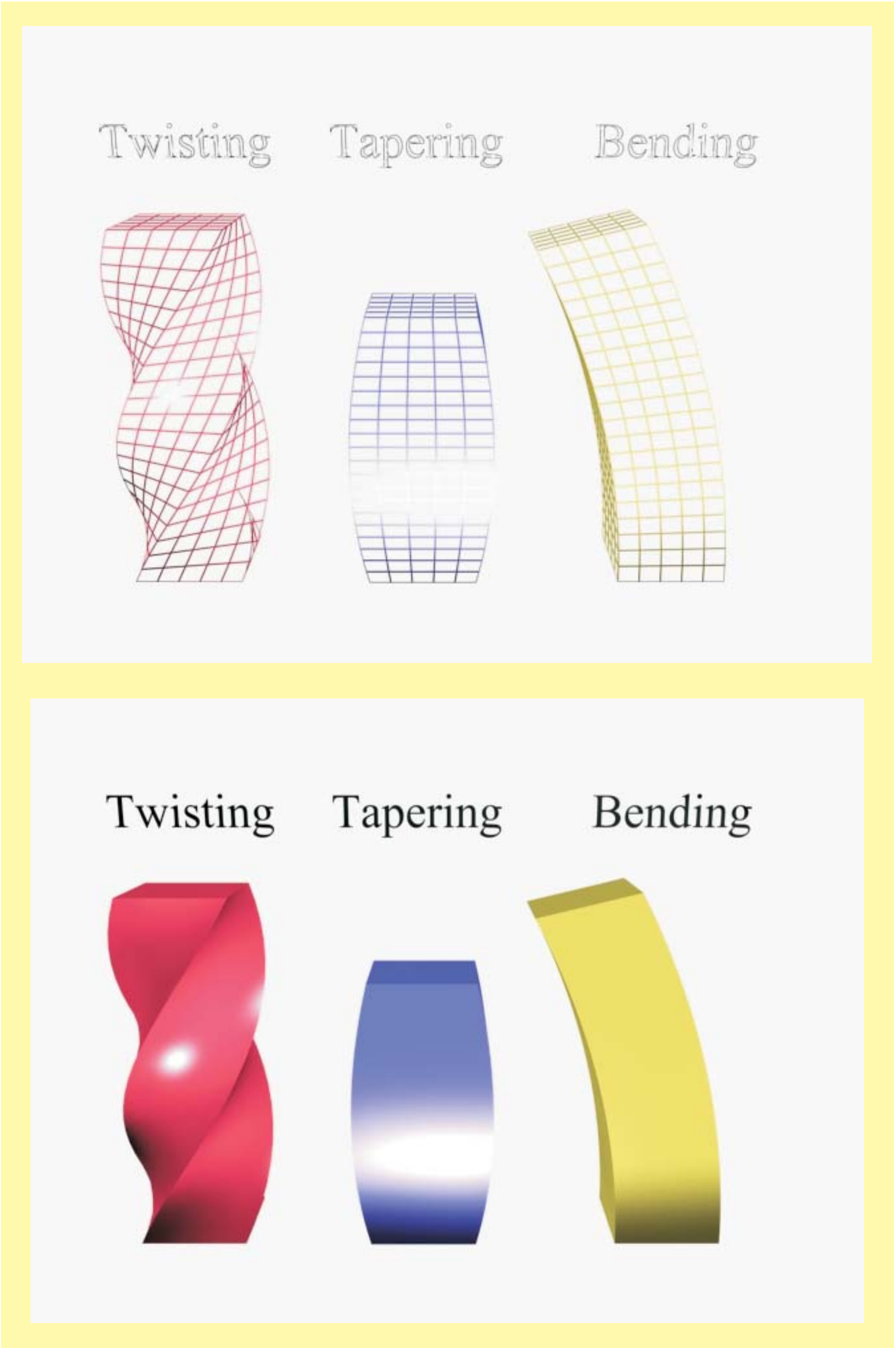


$P' = D_R(P)$

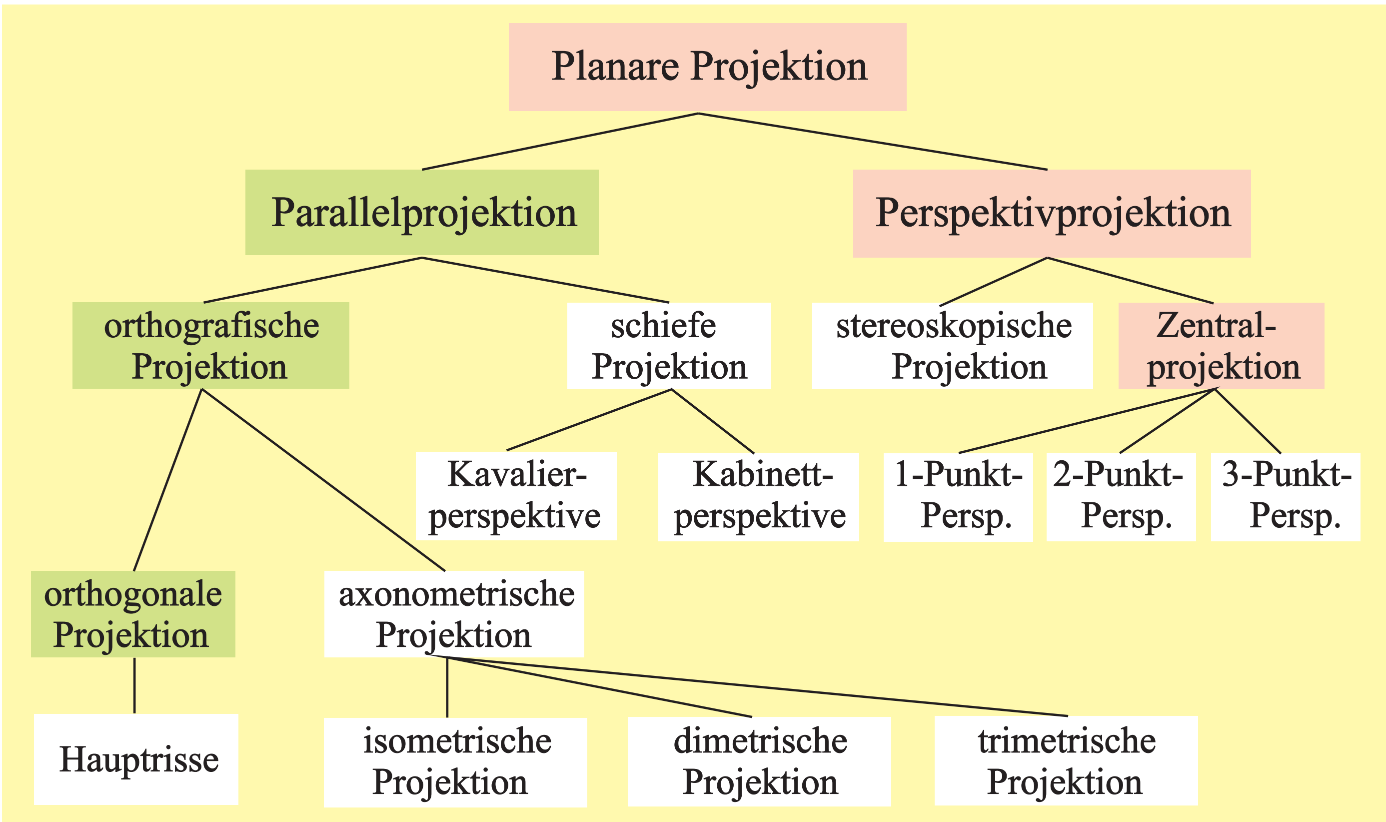
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi(y) & 0 & -\sin\Phi(y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Phi(y) & 0 & \cos\Phi(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Deformation durch nichtlineare Transformation (7)

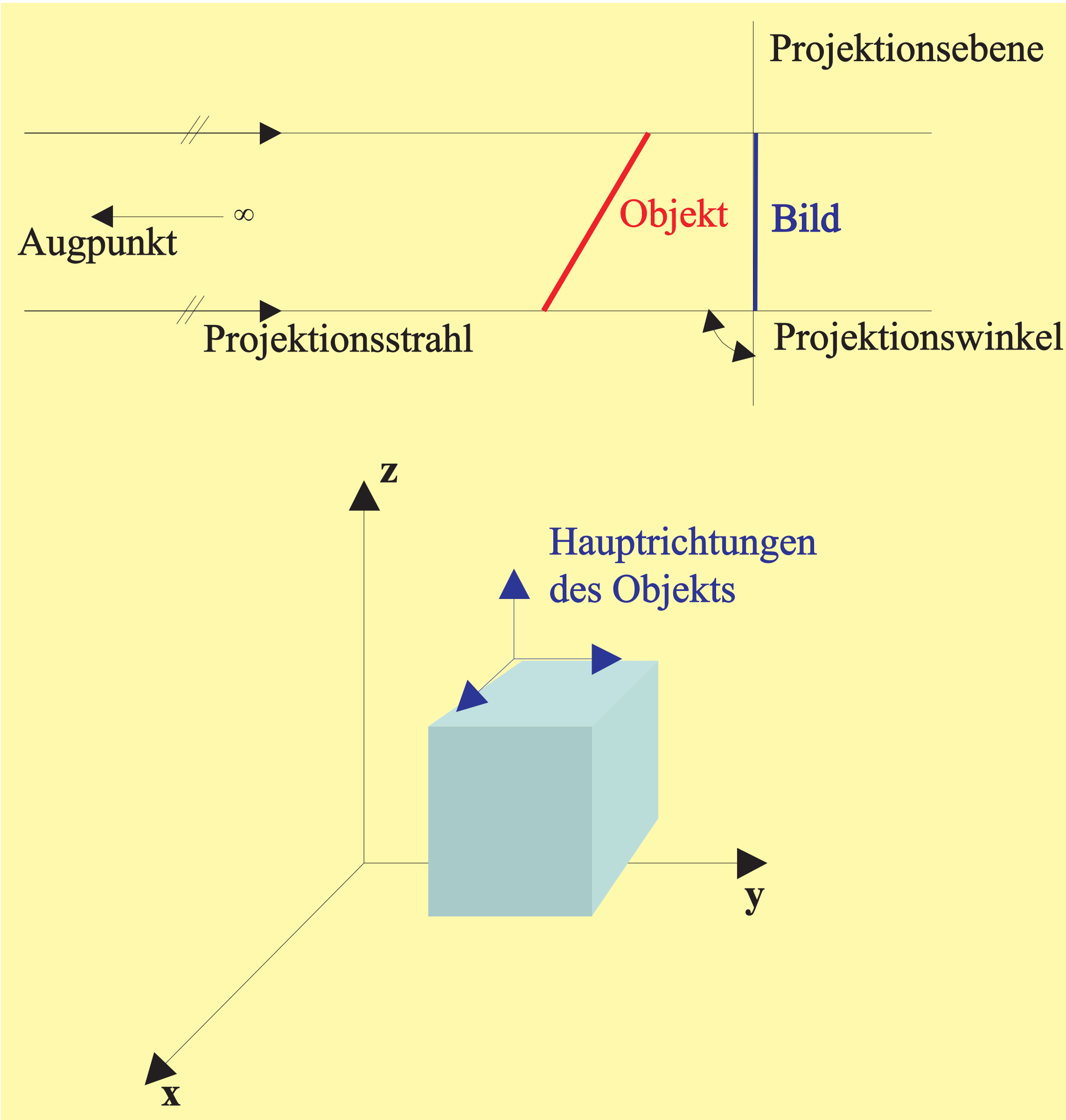


Projektionsarten



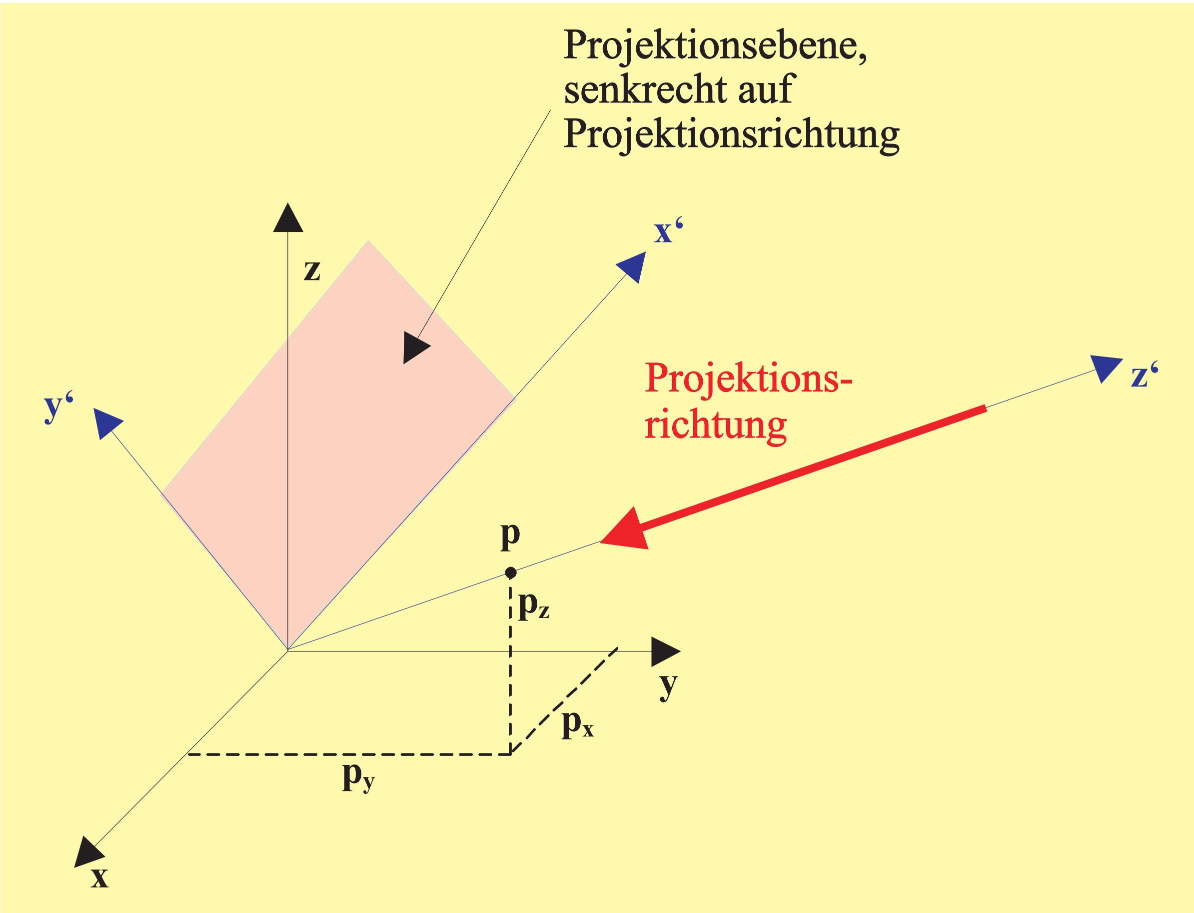
Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Parallelprojektion



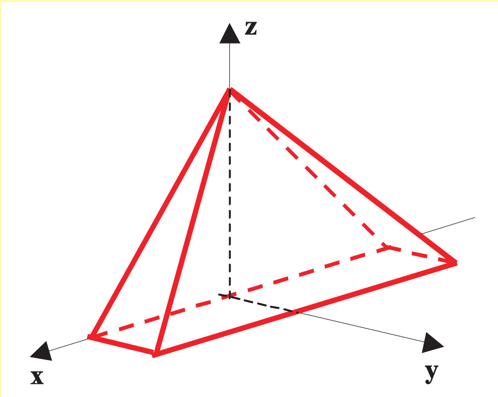
Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

Rechtwinklige Parallelprojektion

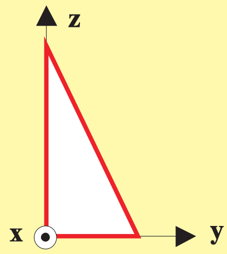


Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

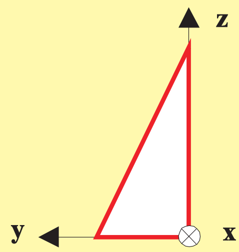
Hauptrisse einer Halbpyramide



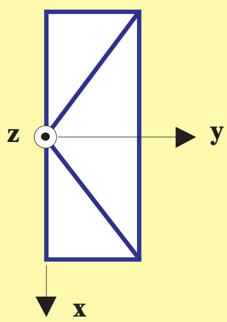
Vorderansicht $(p_x, p_y, p_z) = (-1, 0, 0)$



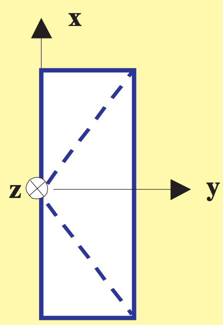
Rückansicht $(p_x, p_y, p_z) = (1, 0, 0)$



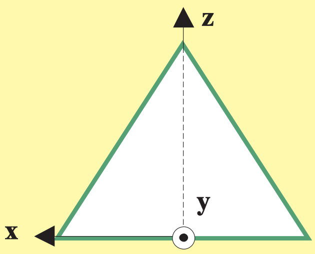
von oben $(p_x, p_y, p_z) = (0, 0, -1)$



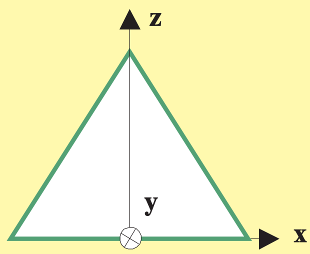
von unten $(p_x, p_y, p_z) = (0, 0, 1)$



von rechts $(p_x, p_y, p_z) = (0, -1, 0)$

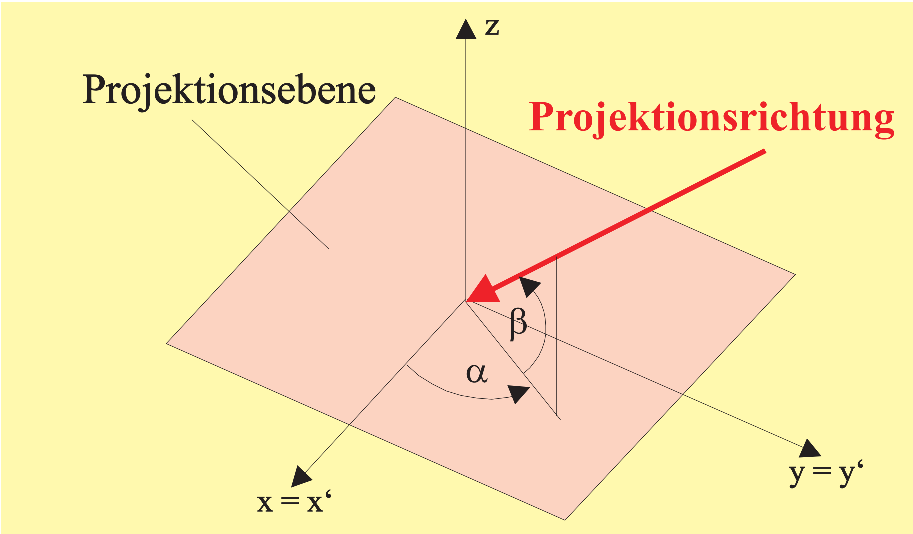


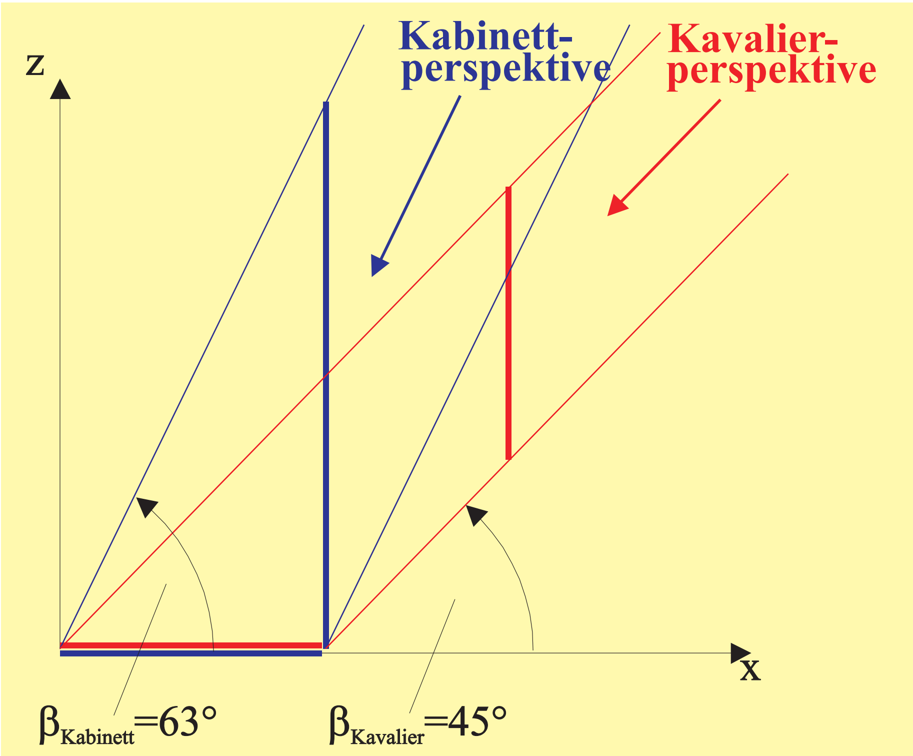
von links $(p_x, p_y, p_z) = (0, 1, 0)$



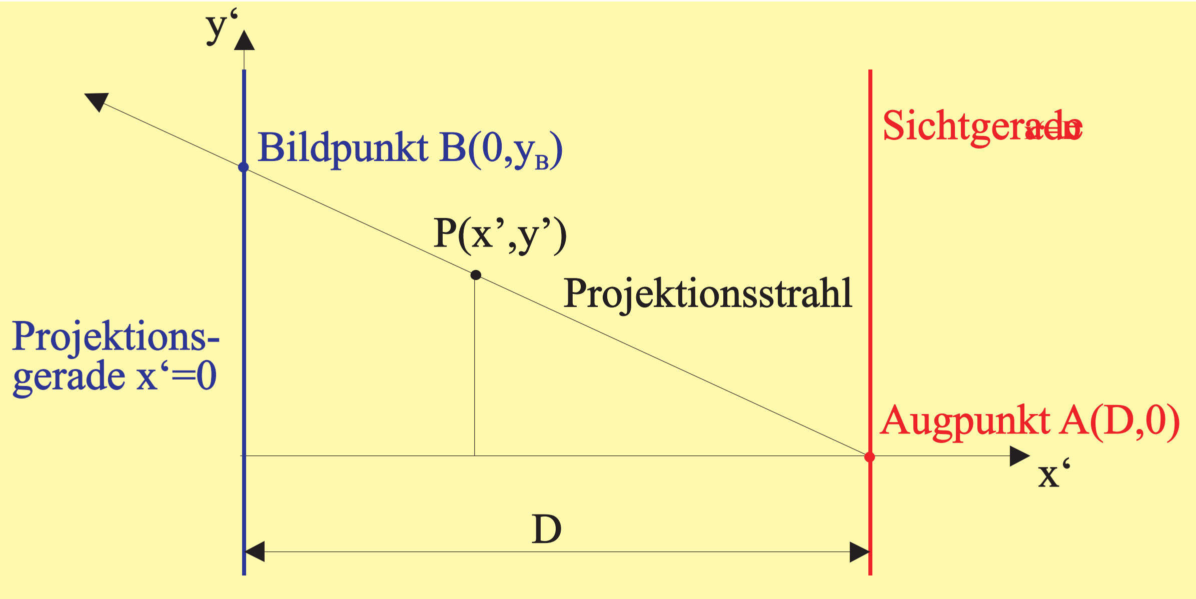
Technische Universität Dresden
Fakultät Informatik
Prof. Dr.-Ing.habil. Orlamünder

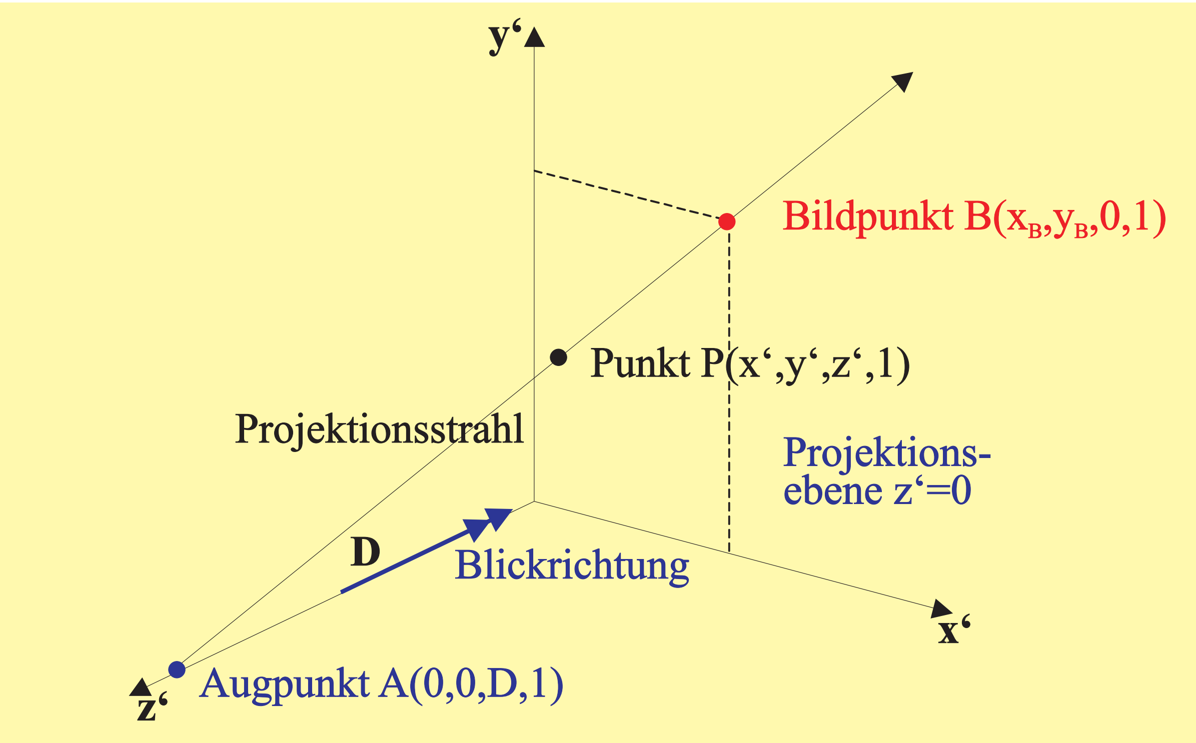
Schiefwinklige Parallelprojektion



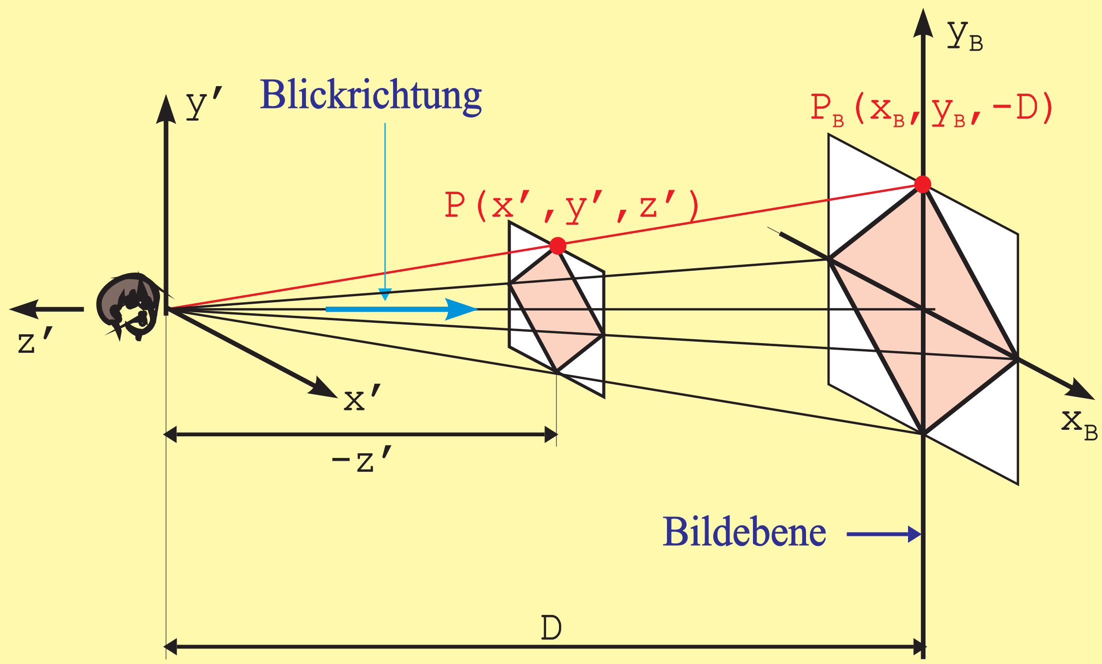


2D- und 3D-Perspektivprojektion





Perspektivische Projektion



Projektionsmatrix

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D/z' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D/z' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D/z' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$